GEOMETRÍA EQUIVALENCIAS

EQUIVALENCIAS DE ÁREA

Dos figuras son equivalentes cuando, con distinta forma, tienen igualdad de área o superficie.

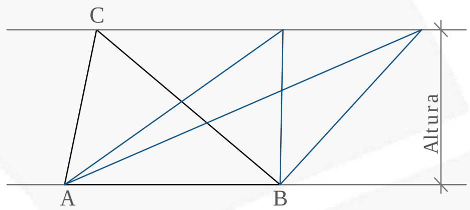
* RECORDATORIO
- El área de un triángulo es (base x altura)/2
- El área de un rectángulo es base x altura
- El área de un cuadrado es lado x lado
- El área de un círculo es πr^2 es decir, pi (3,141592...) x radio al cuadrado

Para poder mantener la igualdad de área vamos a tener muy presentes las fórmulas matemáticas y así entender mejor los procedimientos

CONSTRUCCIONES DE TRIÁNGULOS

T1 CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE A OTRO TRIÁNGULO DADO

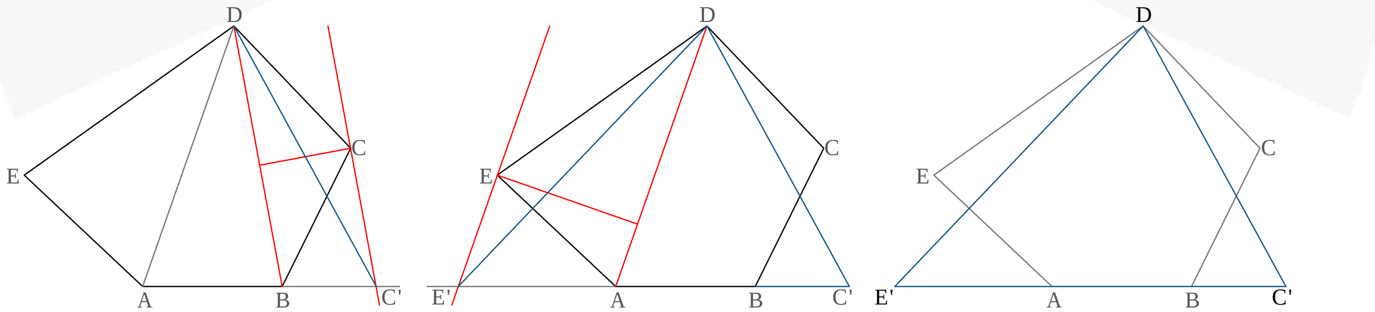
Teniendo en cuenta que el área del triángulo es (base x altura)/2, se trata de mantener la misma base y la misma altura. De ese modo el área será la misma.
Si tomamos AB de base, trazamos una paralela a esta por C y todo triángulo que tenga el tercer vértice sobre esta recta será equivalente.



T2 CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN POLÍGONO DADO

Dado un polígono cerrado cualquiera, tenemos que reducir el número de vértices a 3, para convertirlo en triángulo.
Lo primero triágulamos el polígono con divisiones interiores. Y a continuación, como en ejemplo anterior, vamos a equiparar base y altura, tomando como base la división interior.

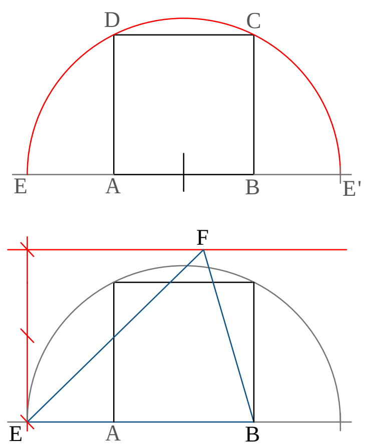
En el ejemplo, si tomamos como base, la diagonal DB, al trazar por C la recta paralela, encontramos el punto de corte con la extensión de la recta AB. Este proceso, elimina los vértices B y C y los sustituye por C'.
De la misma forma, A y E se sustituyen por E' y obtenemos el triángulo equivalente.



T3 CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN CUADRADO

Dado el cuadrado ABCD, vamos a usar como base AB.
Primero, con centro en el medio de AB trazamos una semicircunferencia que pase por los extremos C y D, dando los puntos E y E'

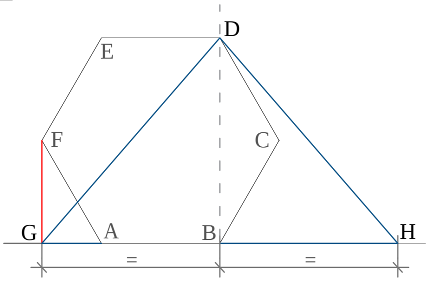
La base del triángulo será el segmento EB. Y la altura será el doble distancia EA. El vértice F puede estar en cualquier punto a esta altura.



T4 CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN HEXÁGONO REGULAR

Para transformar un hexágono irregular en un triángulo, seguiremos el procedimiento genérico para polígonos, pero si se trata de un hexágono regular se simplifica.

Si suponemos la base AB, calculamos la proyección del vértice F sobre esta y encontramos G. Siendo H el simétrico de G respecto de B.
El triángulo equivalente será el GHD

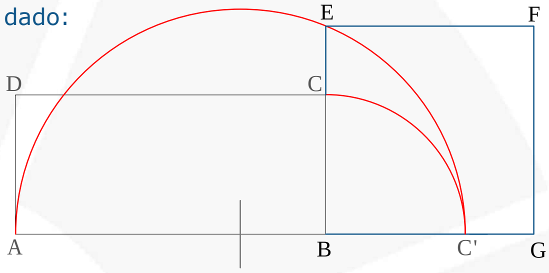


CONSTRUCCIONES DE RECTÁNGULOS Y CUADRADOS

R1 CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN RECTÁNGULO

Para encontrar el lado del cuadrado equivanlente a un rectángulo dado:

El lado del cuadrado es media proporcional de los lados del rectángulo. De manera que los ponemos alineados AB+BC' y trazamos el arco capaz de 90º.
En B extendemos la perpendicular hasta el arco y tenemos el lado BE del cuadrado.

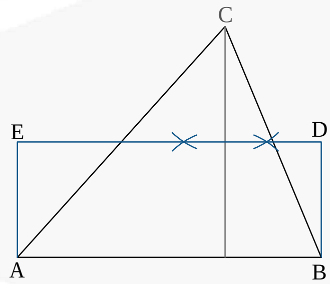


R2 CONSTRUIR UN RECTÁNGULO EQUIVALENTE A UN TRIÁNGULO

Para convertir un triángulo en un rectángulo de igual área hay que fijarse en las fórmulas matemáticas de nuevo:

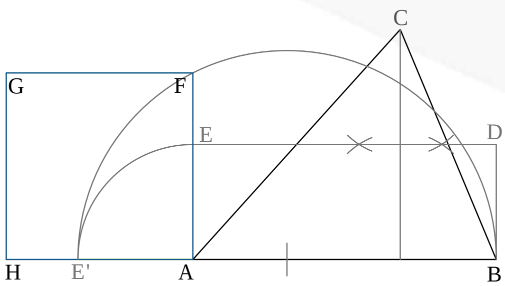
* Triángulo > base x altura /2   * Rectángulo > base x altura

Para equiparar las figuras, basta con utilizar la misma base AB del triángulo y dividir su altura por la mitad. Usando la mitad de la altura como lado del rectángulo obtendremos la figura.



R3 CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN TRIÁNGULO

Este ejercicio es la suma de los dos anteriores.
Primero transformamos el triángulo en rectángulo y después el rectángulo en cuadrado.

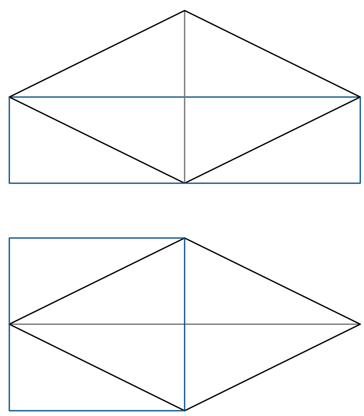


R4 CONSTRUIR UN RECTÁNGULO EQUIVALENTE A UN ROMBO

Esta transformación se aprecia muy bien gráficamente.
Al dibujar las diagonales del rombo, queda dividido en 4 triángulitos.
Si recolocamos los dos superiores en la parte inferior como si fuese un tangram, lo tenemos.

El réctangulo se dibuja usando como lado largo la diagonal mayor del rombo y como lado corto, la mitad de la diagonal menor.

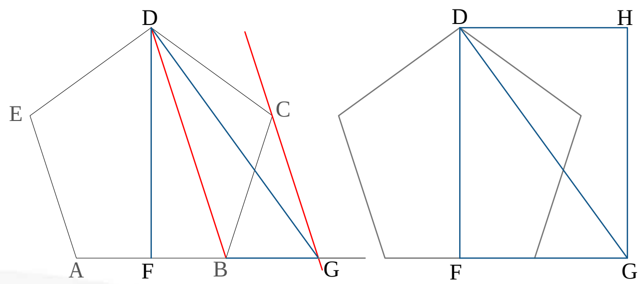
O también puede ser a la inversa:
Diagonal menor + mitad de la diagonal mayor.



R5 CONSTRUIR UN RECTÁNGULO EQUIVALENTE A UN PENTÁGONO REGULAR

Siguiendo lo aprendido hasta ahora, al eliminar un vértice del pentágono ABCDE mediante el método general, nos aparece el triángulo DFG, cuyo área es la mitad del área del pentágono.

Al duplicar este triángulo obtenemos un rectángulo de área equivalente al pentágono.

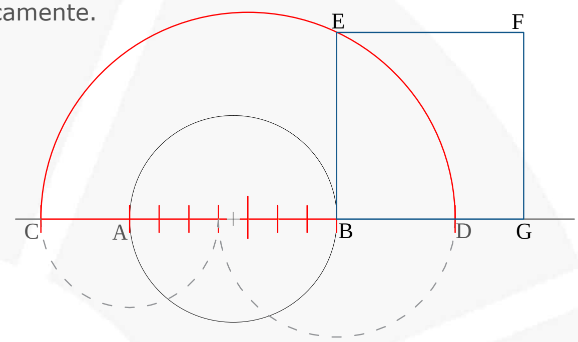


R6 CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN CÍRCULO

Como tal, la cuadratura del círculo no se ha logrado matemáticamente. Pero existen diversos métodos aproximados para ello:

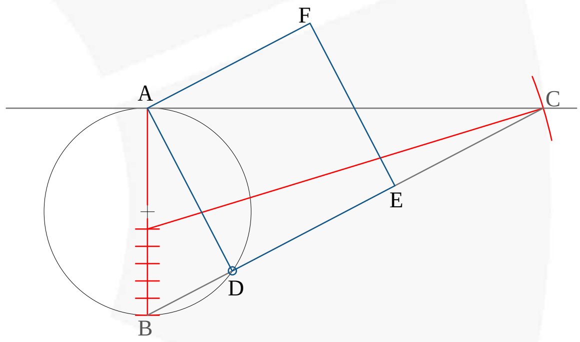
MÉTODO 1

Dividimos el diámetro del círculo en 7 partes iguales, Sobre la extensión del diámetro llevamos hacia un lado 3 partes y hacia el otro 4. Sobre la división 4, hacemos el arco capaz de esta medida CD *(que es el doble del diámetro)* Sobre el extremo B trazamos la perpendicular y hallamos el lado del cuadrado BEFG



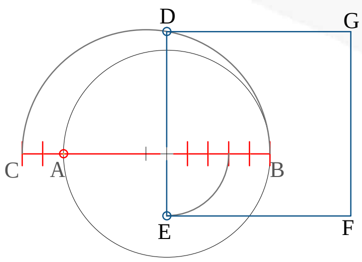
MÉTODO 2

Dado el círculo con diámetro AB y dividimos el radio OB en 6 partes.
Por el extremo A, trazamos la recta tangente al círculo.
Desde la partición 1 y radio 2AB *(el doble del diámetro)* encontramos el punto C sobre la tangente.
En el corte de la recta BC con el círculo obtenemos D, de forma que AD será el lado del cuadrado resultante ABEF



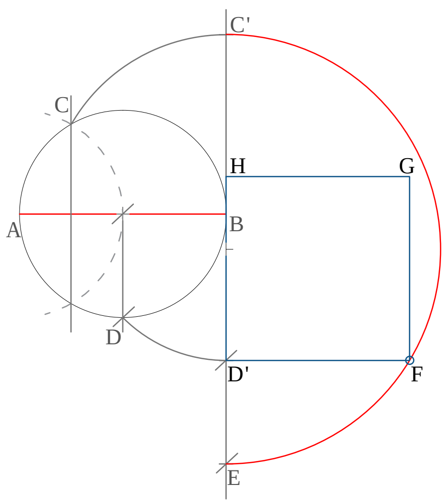
MÉTODO 3

Dado el círculo con diámetro AB y dividimos el radio OB en 5 partes.
C está en la extensión del diámetro desde A añadiendo 2 partes.
Dibujamos la semicircunferencia BC y en la perpendicular desde el centro encontramos D.
En la extensión de DO, añadimos 3 partes más y obtenemos E.
DE es el lado del cuadrado equivalente DEFG

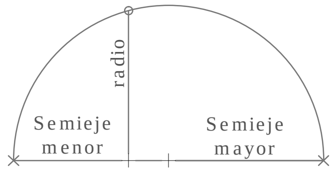


MÉTODO 4

Dado el círculo con diámetro AB, realizamos la mediatriz del radio OA y en el corte con el círculo obtenemos C.
En el radio perpendicular a AB, encontramos D.
Trazamos una tangente desde el punto de B y sobre ella, llevamos C y D, con centro en B, obteniendo así, C' y D'
A continuación de D' incluimos la medida del radio (E)
Dibujamos la semicircunferencia C'E y en la perpendicular desde D' encontramos F.
D'F es el lado del cuadrado resultante D'FGH



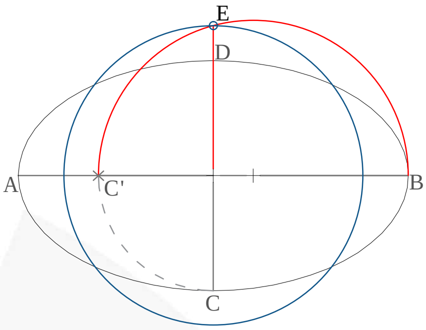
CONSTRUCCIONES DE CÍRCULOS



C1 CONSTRUIR UN CÍRCULO EQUIVALENTE A UNA ELIPSE

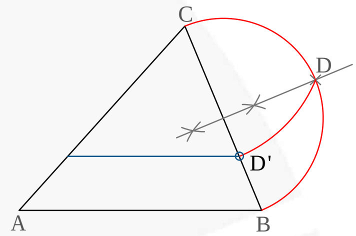
La elipse y la circunferencia son ambas curvas cónicas cerradas, para transformar una elipse en un círculo equivalente, encontraremos el radio del círculo en la media proporcional de la suma de los semiejes (mayor y menor)

Dada la elipse por sus ejes AB y CD, colocamos sobre el eje mayor la distancia OC (semieje menor)
Hacemos el arco capaz de 90º de la suma de C'O + OB.
Sobre O y en perpendicular encontramos E, radio del círculo.



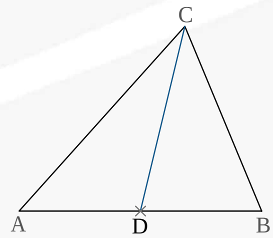
DIVISIONES DE ÁREA

D1 DIVIDIR UN TRIÁNGULO EN DOS PARTES EQUIVALENTES



Mediante una paralela a la base

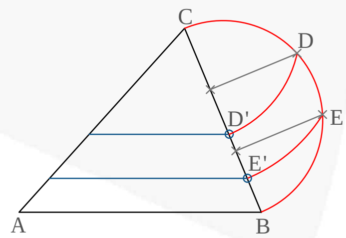
Tomando como base AB, trazamos en otro de los lados xej CB un arco capaz de 90º, y desde el punto medio en perpendicular encontramos D.
Al llevar la medida CD sobre el segmento con centro en C, obtenemos D'. En ese punto trazamos la paralela a la base AB y ya tenemos la división equivalente



Desde un vértice

Tomando como base AB, buscamos el punto medio y la mediana de C divide al triángulo en dos mitades equivalentes.

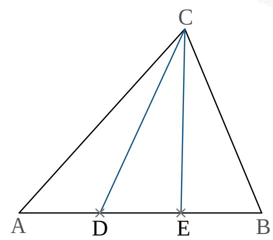
D2 DIVIDIR UN TRIÁNGULO EN VARIAS PARTES EQUIVALENTES



Para ello, usaremos el mismo criterio que en el ejercicio anterior:

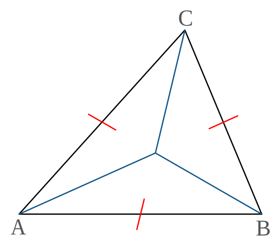
Mediante una paralela a la base

Tomando como base AB, trazamos en otro de los lados xej CB un arco capaz de 90º, y dividimos el segmento en el número de partes que queramos dividir el área, en este ejemplo 3.
De cada división trazamos una perpendicular y proyectamos el punto de corte con centro en C hasta el segmento. Sobre las divisiones D' y E' trazamos las paralelas a la base AB que dividirá al triángulo en partes equivalentes.



Desde un vértice

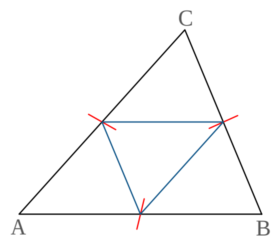
Tomando como base AB, dividimos el segmento el en el número de partes que queramos dividir el área, en este caso 3. Dibujamos rectas que unan las partes con el vértice opuesto C y ya tenemos la división.



D3 DIVIDIR UN TRIÁNGULO EN TRES y CUATRO PARTES EQUIVALENTES

En tres partes > El triángulo queda dividido en tres partes equivalentes al unir el BARICENTRO *(centro de medianas)* con los vértices.

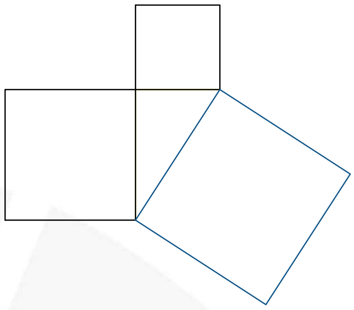
En cuatro partes > El triángulo queda dividido en cuatro partes equivalentes al unir los puntos medios de los lados entre sí.



MULTIPLICADORES DE ÁREA

M1 CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A LA SUMA DE OTROS DOS CUADRADOS DADOS

Para ello, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos sean los lados de respectivos cuadrados dados.
La hipotenusa resultante será el lado del cuadrado de área equivalente a la suma de los anteriores.

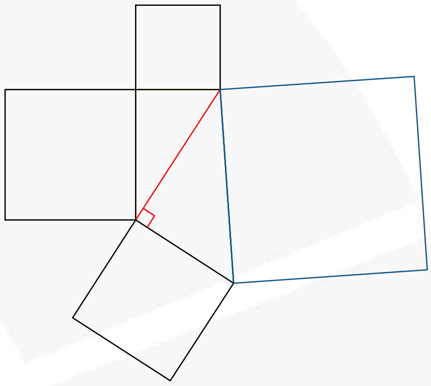


M2 CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A LA SUMA DE OTROS TRES CUADRADOS DADOS

Siguiendo el proceso anterior, primero colocamos los lados de dos cuadrados como catetos de un triángulo rectángulo.
Dibujamos la hipotenusa de este triángulo y trazamos perpendicularmente y desde un extremo el lado del cuadrado que falta. Si tomamos estas dos medidas nuevamente como catetos de un triángulo rectángulo, la hipotenusa será el lado del cuadrado sumatorio de los otros tres.

El mecanismo es el mismo que el anterior. Primero sumanos dos, y luego a la suma de estos le añadimos el tercero.

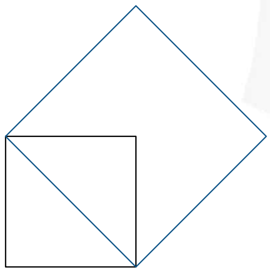
Si queremos seguir sumando nuevos cuadrados, repetiremos el proceso.



M3 CONSTRUIR UN CUADRADO DEL DOBLE DE ÁREA QUE EL CUADRADO DADO

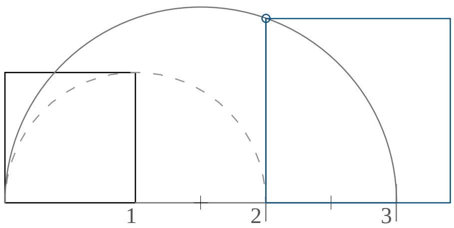
MÉTODO 1

Este método se aprecia fácilmente de forma gráfica. Simplemente al utilizar la diagonal del cuadrado dado como lado del cuadrado de área doble.



MÉTODO 2

Dado el cuadrado inicial, prolongamos su base, transportando la longitud del lado dos veces más.
Al hacer el arco capaz 90º del triple del lado y levantar la perpendicular sobre la segunda división encontramos el lado del cuadrado de área doble.

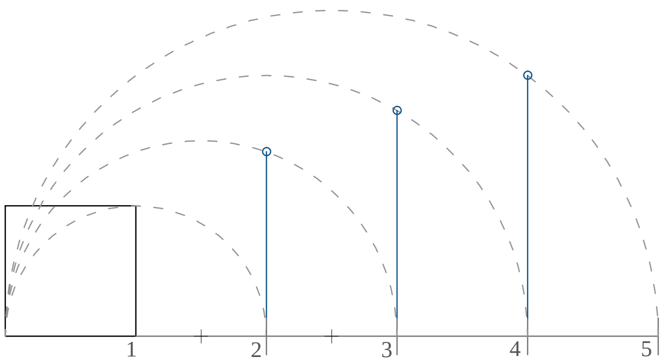


* CUADRADOS DE ÁREA CRECIENTE SEGÚN EL FACTOR MULTIPLICADOR

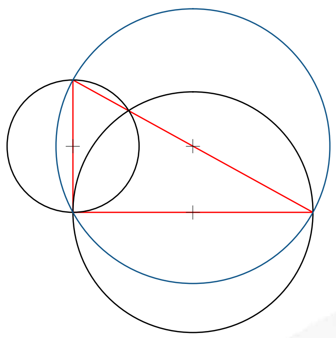
Este método 2 sirve para encontrar áreas sucesivas. Es decir, el triple del área, el cuádruple, etc.
En la prolongación de la base, transportaremos la longitud de lado sucesivas veces.

Si queremos encontrar el cuadrado de área triple, usaremos el arco capaz de 90º de 4 divisiones y levantaremos la perpendicular en la tercera partición.

Si queremos encontrar el de área cuádruple, haremos 5 divisiones para el arco capaz y la perpendicular la levantaremos en la cuarta. Y así sucesivamente.



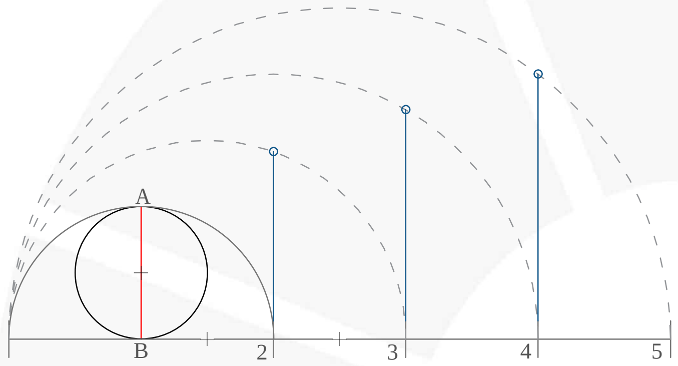
M4 CONSTRUIR UN CÍRCULO EQUIVALENTE A LA SUMA DE OTROS DOS CÍRCULOS DADOS



Al igual que en la suma de dos cuadrados utilizábamos los lados de los cuadrados para trazar un triángulo rectángulo y encontrar el lado del cuadrado resultante, con los círculos lo haremos igual pero con diámetros.

Para ello, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos sean los diámetros de respectivos círculos dados.
La hipotenusa resultante será el diámetro del círculo de área equivalente a la suma de los anteriores.

M5 CONSTRUIR CÍRCULOS DE ÁREA CRECIENTE SEGÚN EL FACTOR MULTIPLICADOR



De la misma manera que con los cuadrados, vamos a proceder con los círculos.

Trazamos el díametro vertical AB de la circunferencia dada y sobre B una recta tangente. Pinchando en B, llevamos la medida del diámetro a ambos lados.

Para encontrar el área doble respecto al círculo inicial Haremos el arco capaz de 3 particiones, considerando a B la primera.
En la segunda división trazamos la perpendicular y en el corte con el arco obtenemos el diámetro del círculo.

Si queremos encontrar el círculo de área triple, usaremos el arco capaz de 90º de 4 divisiones y levantaremos la perpendicular en la tercera partición.

Si queremos encontrar el de área cuádruple, haremos 5 divisiones para el arco capaz y la perpendicular la levantaremos en la cuarta, etc.