DOVELA academia

TEMA 35· Transformaciones geométricas del plano.
Giros, traslaciones, simetría, homotecia e inversión.

Autora: Iria Senra Álvarez

ESQUEMA/ ESTRUCTURA TEMA 35

1. INTRODUCCIÓN

La palabra **geometría** viene de las griegas "geo" =tierra y "metron" =medida, es decir, "medida de la tierra". Y es que precisamente **su estudio surge de la necesidad de egipcios y babilonios de medir y controlar las tierras de cultivo y herencias.** Aun así, fueron los **griegos** como Tales de Mileto, Pitágoras o Euclides, entre otros, los que realmente profundizaron en la **sistematización de su estudio** desde un punto de vista científico y matemático tal y como hoy la entendemos. Sentaron las bases de la geometría plana elemental que se usaría durante siglos hasta nuestros días.

Aunque en sus inicios esta disciplina obedecía, como su nombre lo indica, a la medición en su sentido pragmático, con el paso del tiempo la humanidad comprendió que incluso las abstracciones y representaciones más complejas pueden ser expresadas en términos geométricos. Todas las ramas de estudios científicos, desde las matemáticas más básicas hasta la física más compleja, se pueden acabar asimilando y expresando en términos geométricos y espaciales. Pero también resulta fundamental en temas más creativos como el arte, tanto plástica, como volumétrica, arquitectónica o incluso musical. Por ello es fundamental que nuestro alumnado conozca y maneje con fluidez los términos y los conceptos asociados a la geometría desde lo más básico.

Durante el desarrollo de este tema nos centraremos en ahondar en las transformaciones geométricas entendidas en el plano. Este tipo de transformaciones, así como su versión entendida en el espacio, las transformaciones proyectivas que se estudian en otro tema de la oposición, son conceptos que se relacionan claramente con el arte y la composición, así como con las matemáticas y por su puesto son de aplicación directa en aspectos variados del dibujo técnico. Por ejemplo, la inversión o la homotecia para resolver tangencias, o la homología y la afinidad para comprender el funcionamiento de los sistemas de representación en geometría descriptiva y resolver parte de sus procedimientos más habituales.

Partiremos en este tema de definir **qué entendemos como transformación geométrica** y como **las clasificamos** para a continuación ahondar en los **diferentes tipos**, como funcionan y también como se relacionan entre ellas.

2. DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

Llamamos **transformaciones geométricas en el plano** a las operaciones geométricas que permiten deducir una nueva figura a partir de otra original de tal manera que a cada punto del plano le corresponde otro punto del mismo plano de manera biunívoca.

Se clasifican según las propiedades que conservan o no las figuras transformadas respecto de la original.

- Por ejemplo, las llamamos **transformaciones isométricas** cuando las nuevas figuras conservan tanto forma como medida respecto de la original. Es decir, son idénticas.
- Las llamamos **transformaciones isomorfas** cuando conservan su forma, pero no su tamaño. En realidad, las medidas entre ambas figuras conservan una relación de proporcionalidad como veremos.

- Y, por último, llamamos **transformaciones anamorfas** cuando no se conserva ni la forma ni el tamaño ni relación alguna en las medidas.

3. TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS.

A continuación, pasaremos a describir cómo funcionan y que características tienen las tres transformaciones isométricas que son la **traslación, el giro y la simetría**.

3.1. TRASLACIÓN

En primer lugar, hablaremos de la **traslación**, que es una operación geométrica que desplaza cada punto de la figura original una distancia fija según una determinada dirección y sentido. (Fig. 01)

Las figuras original y transformada son totalmente idénticas, es decir, conservan medidas, ángulos, paralelismos entre sus elementos y el orden y sentido de sus elementos. Además, los segmentos trasladados son paralelos a los originales.

3.2. GIRO

Por otro lado, **el giro** es una operación geométrica que transforma una figura dada de tal modo que cada punto se desplaza según una determinada magnitud angular entorno a un punto fijo que llamamos **centro de giro** (O). (Fig. 02)

Si el centro de giro se sitúa en el centro geométrico de la figura lo llamamos **rotación.**

En ambos casos las figuras que se obtienen son idénticas a las originales y como en el caso anterior conservan las medidas, ángulos, paralelismos y el orden y sentido de sus elementos, pero los segmentos trasladados no tienen por que ser paralelos. Esto solo ocurre cuando el ángulo de giro es 180º.

3.3. SIMETRÍA

Y la última transformación isométrica es la **simetría**. Esta operación geométrica asigna a cada punto de la figura otro diametralmente opuesto bien a un eje o bien a un centro de simetría.

- La llamamos **simetría axial** cuando se trata de un eje, es decir, una recta. El punto simétrico en este caso se encuentra alienado de manera perpendicular al eje con el original y a igual distancia al este. (Fig. 3A)
- Y si lo hace respecto de un centro, es decir, un punto fijo, la llamamos **simetría central**. En este caso el punto simétrico se encuentra también alineado con el original y con el centro y a igual distancia de este. (Fig. 3B)

En ambos casos se conservan medidas y forma, por tanto, paralelismos y ángulos. Pero en el caso de la simetría axial una recta solo es paralela a su simétrica si es paralela o perpendicular al eje. En el caso de la simetría central, las rectas simétricas con paralelas siempre, pero con orden y sentido de sus elementos invertidos. Esto viene a equivaler a un giro de 180º con centro de giro en el centro de simetría.

4. TRANSFORMACIONES ISOMORFAS

Explicaremos ahora la **homotecia** como transformación isomorfa que como ya hemos aclarado, conservan su forma y una relación de proporcionalidad en sus magnitudes. Y luego un caso particular que es la **semejanza**.

4.1. HOMOTECIA

Dado un punto fijo O y un numero entero K≠0, llamamos **homotecia de centro O y razón K** a la transformación geométrica que, a cada punto del plano, por ejemplo un punto A, le asigna otro que llamaremos A' que esta alineado con los otros, es decir OA de tal manera que se cumple la siguiente relación matemática: $\boxed{OA' = OA \times K}$

Es decir, el punto transformado se desplaza respecto del original alineado con el centro una distancia igual a la que separa al punto original del centro multiplicado por un valor fijo K que llamamos **razón de la homotecia**. (Fig. 4)

Siempre mantienen su forma, es decir paralelismos y ángulos entres sus elementos, pero la relación de proporcionalidad entre sus medidas se basa en el valor de K. Y por tanto según varié el valor de K podemos deducir características de esta transformación.

- Por ejemplo, cuando el valor de K es mayor que cero (K>0) la **homotecia es directa** y ambas figuras están a un mismo lado del centro (Fig. 4A). Si por el contrario K es menor que cero (K<0) la llamaremos **homotecia inversa** ya que en este caso la figura transformada estará al otro lado del centro respecto a la figura original (Fig. 4B).
- Cuando K es mayor que el valor absoluto de 1 (K>|1|) la figura homotética será mayor que la original (Fig. 4A) y cuando se encuentra entre la unidad y cero (K<|1|) la figura obtenida será más pequeña (Fig. 4B).
- Por último, si K es exactamente igual a menos uno (K=-1) la homotecia equivaldría a una **simetría central** o, lo que es lo mismo, **un giro de 180°**.

Por otro lado, y en relación con el centro, si este, en lugar de ser un punto propio, fuese un punto impropio, equivaldría a una **traslación** ya que los puntos homotéticos en este caso no estarían alineados a un punto si no a una dirección.

Además, las rectas que no pasan por el centro O tendrán homotéticas paralelas, aunque en el caso de la homotecia inversa no mantendrán el sentido de los elementos, si no que invertirán su orden como ocurría con la simetría central.

Y por último aclararemos que **dos circunferencias cualesquiera serán siempre homotéticas entre sí**, algo que resultará relevante a la hora de utilizar la homotecia como herramienta para resolver algunos problemas de tangencias. El centro de homotecia entre dos circunferencias está alineado con sus centros y el punto de intersección de sus tangentes comunes. En el caso de las tangentes exteriores se tratará de una homotecia directa y con las tangentes interiores de una homotecia inversa (Fig. 5).

4.2. SEMEJANZA

Decimos que dos figuras son **semejantes** cuando conservan su forma, ángulos y paralelismo entre sus elementos, y sus medidas mantienen una relación de proporcionalidad mediante un valor K que llamamos **razón de semejanza** (Fig. 6). Por tanto, deducimos que la homotecia es por tanto un caso particular de semejanza donde además existe una relación respecto de un punto fijo al que hemos llamado centro.

Las relaciones de semejanza serán relevantes por ejemplo a la hora de trazar polígonos.

5. TRANSFORMACIONES ANAMORFAS

A continuación, describiremos cómo funcionan la **homología, la afinidad y la inversión,** tres transformaciones anamorfas.

5.1. HOMOLOGÍA

La **homología** (Fig. 7) es una transformación geométrica que relaciona dos figuras planas de tal manera que se cumplan dos requisitos:

- dos puntos para ser homólogos deben estar alineados con un punto fijo que llamamos **centro de homología**.
- Y por otro lado dos rectas homólogas se cortan en una recta fija que llamamos **eje de homología.** El eje es una recta formada por tanto por puntos cuyos homólogos coinciden con los originales y por eso estos se llaman **puntos dobles**.

Llamamos **rectas límite** al lugar geométrico de los puntos del plano cuyos homólogos están en el infinito. Por tanto, no pueden tener ningún punto en el eje de la homología y son paralelas a este. Existen dos rectas límite que llamaremos RL1 y RL2 y ambas están a la misma distancia una del eje de homología y la otra respecto del centro de homología.

Estas rectas pueden ser un dato de partida ya facilitado o puede que tengamos que determinarlas a partir de puntos y rectas homologas. Por ejemplo, si se nos facilita una recta definida por dos puntos AB y sus homólogos A'B' podremos determinar la RL1 trazando desde el centro O una paralela a la recta homóloga. Por ser paralelas nunca se encontrarán o se dice que se encuentran en el infinito. Por tanto, donde esta recta corte a la recta original AB determinará un punto que no tiene homólogo, un punto que llamaremos P cuyo homólogo P' estará en el infinito. Como sabemos además que la recta limite ha de ser paralela al eje de la homología podremos trazar. (Fig. 8)

Observamos que en este tipo de transformación no se conserva forma alguna de la figura original. Solo el número de elementos, es decir, tendrá el mismo número de vértices y lados, pero las relaciones de medida y ángulo variarán y por ello se trata de una transformación anamorfa.

La homología puede entenderse, como se plantea en otro tema de la oposición, como **una transformación proyectiva en el espacio** (Fig. 9) de tal manera que cada una de las figuras está contenida en un plano diferente, el eje de homología es la traza o recta intersección entre ambos planos y el centro es un punto propio del espacio externo.

En el espacio las rectas limite son las trazas de los planos paralelos a los dos planos que contienen a las figuras.

Esta forma de entender la homología espacial será de aplicación habitual:

- tanto en ejercicios de **sistema diédrico** de secciones planas de superficies radiadas como pirámides o conos donde el centro de la homología es el vértice de la figura, los dos planos suelen ser el plano horizontal del diedro y el plano que la secciona y que relacionan dos figuras planas que están contenidas en ellos, la planta del volumen y la sección plana producida.
- y por ejemplo también en **sistema cónico** donde el punto de vista será el centro de homología, los dos planos son el plano del cuadro y el geometral, el eje de homología es la línea de tierra intersección entre ambos y una de las rectas limite es la línea del horizonte donde se encuentran los puntos de fuga de rectas paralelas, es decir, es la recta que determina sus puntos del infinito.

5.2. AFINIDAD

La afinidad (Fig. 10) también se conoce como **homología afín** ya que se puede entender como un caso particular de esta en la que el centro de homología es un punto impropio o del infinito. Por tanto, en este caso ha de cumplirse dos requisitos:

- las rectas afines, al igual que en la homología, se cortan en una recta fija que llamamos **eje de afinidad**.
- Pero los dos puntos para ser afines deben estar alineados, no con un punto, si no con una dirección dada que llamamos **dirección de afinidad**. Si esta dirección es ortogonal al eje, la llamamos afinidad ortogonal, y en caso contrario afinidad oblicua.

Al no existir centro de homología en este caso no hay rectas limite.

En de la afinidad si se mantiene el paralelismo entre los propios elementos de la figura, aunque no entre la original y la afín. Esto solo ocurre cuando los elementos son paralelos al eje de afinidad.

Y en este caso si que existe una relación de proporción de las distancias de dos puntos afines al eje que se expresa mediante **la razón de afinidad** que se expresa K= PA' x PA donde A es el punto original, A' su afín y P el punto donde corta la recta que los une según la dirección da afinidad al eje de afinidad.

Igual que en el caso de la homología, la afín también se puede entender de manera espacial relacionando dos figuras planas contenidas en planos diferentes mediante una dirección dada. (Fig. 11) Esta manera de entenderlo hacer que la podamos aplicar en ejercicios de **sistema diédrico** como:

- Secciones planas, en este caso de superficies radiadas de generatrices paralelas, como prisas o cilindros, donde precisamente estas generatrices definen la dirección de afinidad.
- Pero también en ejercicios de abatimientos de planos sobre los planos del diedro, donde el eje de afinidad es la traza entre ambos planos y la dirección de afinidad es el recorrido que hacen los puntos al girar en el espacio y que es perpendicular al eje de afinidad.

5.3. INVERSIÓN

Y la última transformación anamorfa es **la inversión**. (Fig. 12) Se dice que dos puntos son inversos si se cumplen dos requisitos:

- Están alineados con punto fijo que llamamos **centro u origen de inversión** O.
- Y además la distancia entre cualquier par de puntos inversos a ese centro mantiene una relación constante que se expresa OA x OA'= OB x OB'= OC x OC'=… K cifra a la que llamamos **razón de inversión**.

Observamos que esta definición tiene un aclara relación con la definición de potencia de una circunferencia respecto de un punto por lo cual podemos deducir que los pares de puntos inversos, siempre y cuando no estén alineados, determinan **una circunferencia**. Es decir, **son concíclicos**

Los puntos tangencia T desde el centro O a esta circunferencia son **puntos dobles** ya que T coincide con su inverso T' y la distancia desde el centro a estos puntos es igual a la $\sqrt{K}$ ya que ha de cumplirse que OT x OT' = K y T es un punto doble, entonces OT^2=K.

El conjunto de puntos dobles de una inversión será por tanto todos aquellos puntos cuya distancia al centro O coincida con ese valor y podemos deducir que formarán una circunferencia cuyo radio es $\sqrt{K}$. Esta circunferencia se llama **circunferencia de puntos dobles** (CPD), pero también **circunferencia de autoinversión** (CAI) precisamente por que resultará fundamental a la hora de encontrar parejas de puntos inversos de manera geométrica como explicaremos a continuación en un ejemplo (Fig. 13):

- Si nos facilitan una razón o potencia de inversión K y un centro podremos trazar la circunferencia de autoinversión.
- Si queremos hallar el inverso a un punto P que supondremos externo a la circunferencia de puntos dobles, debemos en primer lugar buscar el punto de tangencia T a la circunferencia de autoinversión desde ese punto. Para ello recurrimos a dibujar el arco capaz de 90º del segmento OP ya que sabemos que el radio OT ha de ser perpendicular a la recta definida por el segmento PT por ser esta una propiedad básica de las tangencias. Este arco capaz es la semicircunferencia.
- Una vez que conocemos este punto T, podemos determinar P'. Este punto por ser homólogo de P ha de estar alineado con ese y con el centro de la inversión O, y además ha de estar situado sobre esta recta de tal modo que se cumpla que $OPxOP'=OT^2=\sqrt{K}$. Si aplicamos la media proporcional y el teorema de la altura, P' debe ser la base de la altura del triángulo rectángulo que forman O P y T donde OP será la hipotenusa y el vértice T será el que forme el ángulo de 90º tal y como ya sabemos.
- Siempre sucederá por tanto que un punto inverso de otro está al otro lado de la circunferencia de autoinversión.

Las inversiones, al igual que las homotecias, dependen del valor de su razón K. Y como también ocurría con las homotecias cuando el valor de K es mayor que cero la **inversión es positiva** y los dos puntos inversos están al mismo lado del centro O, y cuando K es menor que cero **la inversión es negativa** y los dos puntos están en lados contrarios del centro. En este caso no existe una circunferencia de puntos dobles. Lo que ocurre en las inversiones negativas es que la circunferencia de radio $\sqrt{K}$ es aquella cuyos puntos inversos son simétricos respecto del centro de la inversión.

Hay dos propiedades de esta transformación que resultarán básicos a la hora de utilizarla para resolver problemas de tangencias:

- La primera es que la **tangencia se conserva**, es decir, los inversos de dos elementos tangentes son también tangentes entre sí.
- Y la segunda es que **la inversa de una recta que no pasa por el centro O**, es **una circunferencia que si pasa por el centro**.

6. CONCLUSION

Llegado a este punto final y echando la vista atrás, observamos que todas estas transformaciones geométricas, desde las más básicas a las más complejas, tiene una aplicación directa en conceptos más complejos de dibujo técnico. Homología y afinidad en geometría descriptiva; homotecia y también inversión, relacionado con el concepto de potencia, en la resolución de tangencias complejas.

Pero como ya he comentado en la introducción, esta manera de entender las relaciones geométricas espaciales está íntimamente ligada no solo dibujo técnico sino también al mundo del arte. La traslación, relacionada con la repetición modular, la simetría, la rotación, etc… son herramientas básicas de composición artística. Pero además también están fuertemente relacionados al pensamiento matemático científico. Una inversión puede y debe entenderse tanto en términos gráfico-visuales como en términos matemáticos numéricos. Pero por ejemplo una traslación o una rotación también son de aplicación en la física mecánica para entender el movimiento de un objeto según un vector determinado.

Por ello creo que resulta fundamental que nuestro alumnado asimile este esquema de pensamiento primero asimilando los conceptos más básicos en los cursos base de la ESO para poder luego aplicarlos con fluidez en los cursos superiores de bachillerato científico-técnico en las materias de dibujo, matemáticas o física, aunque también por ejemplo en temas compositivos que tienen vital importancia para entender el arte en materias del bachillerato de artes como diseño, fundamentos del arte, etc.…

7. ALGUNAS REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y WEBS

- Geometría Descriptiva Tomos 1-5. | F. Javier Rodríguez de Abajo | Ed. Donostiarra, San Sebastián

- Dibujo técnico I 1º Bachillerato – Guía Práctica para el alumno | Joaquín Gonzalo Gonzalo | Ed. Donostiarra, San Sebastián.

- Geometría Descriptiva: Ejercicios resueltos y bibliografía comentada | Juan Carlos Gómez Vargas | Ed. Universidad de Granada, Granada 2016

- Estudio de los sistemas de representación | Julián Giménez Arribas | Prensa Española, Madrid 1966

- Geometría Descriptiva | Fernando Izquierdo Asensi | Ed. Paraninfo, Madrid 1993

- Transformaciones en el plano | Suarez, A.C. | AMCT, Gurabo, Puerto Rico 2010

- El grupo de las isometrías en el plano | Adela Jaime Pastor, Ángel Gutiérrez Rodríguez | Ed. Síntesis 1996

IMÁGENES

Figura 1

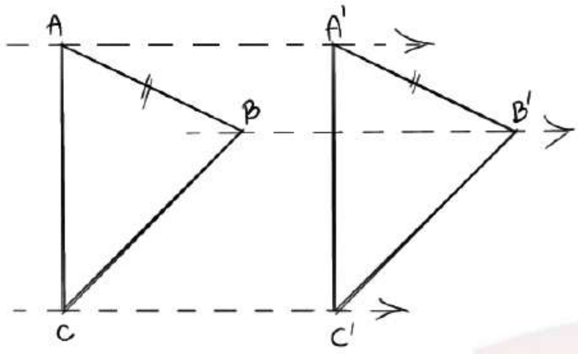


Figura 2

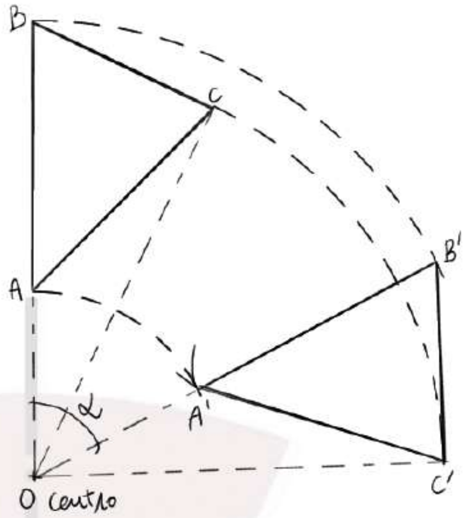


Figura 3A

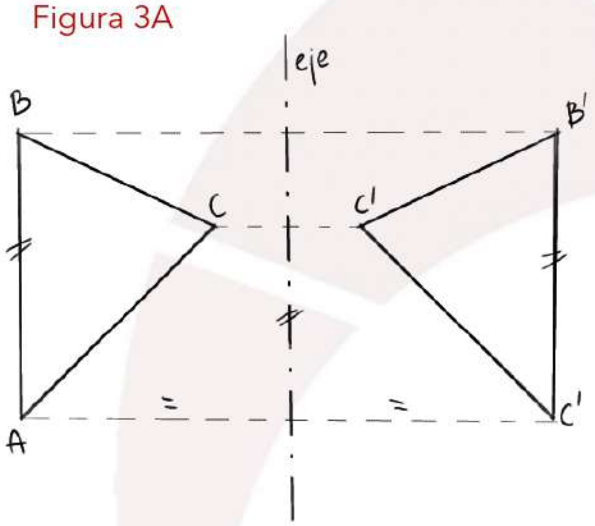


Figura 3B

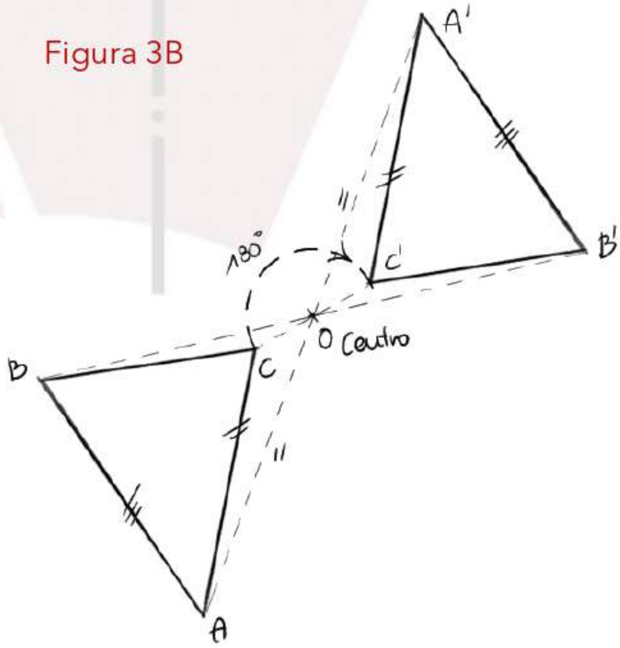
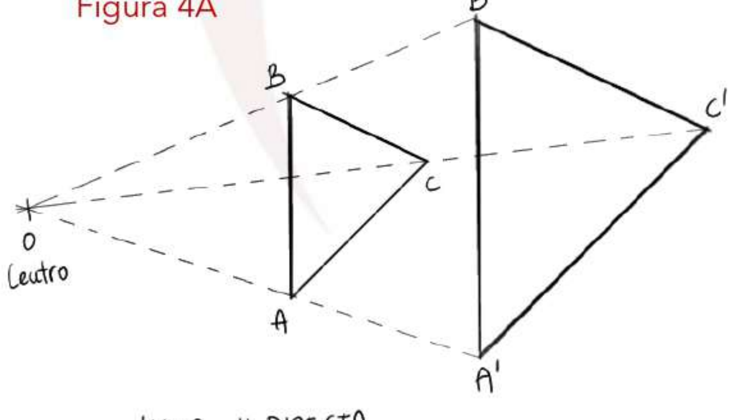


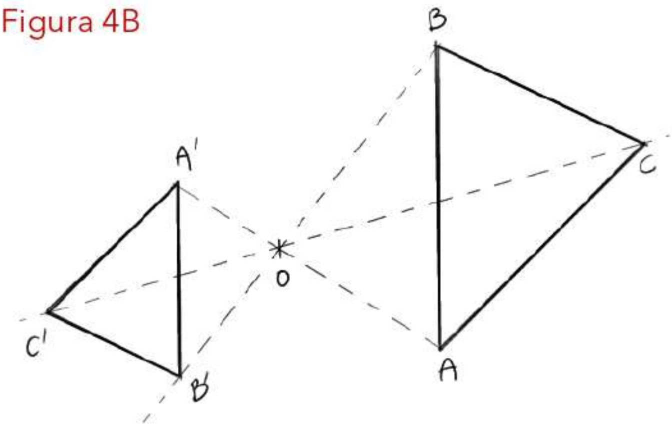
Figura 4A



K>0 H. DIRECTA

K>|1| A'B'C' >ABC

Figura 4B



K<0 H. INVERSA

K<|1| A'B'C'< ABC

Figura 5

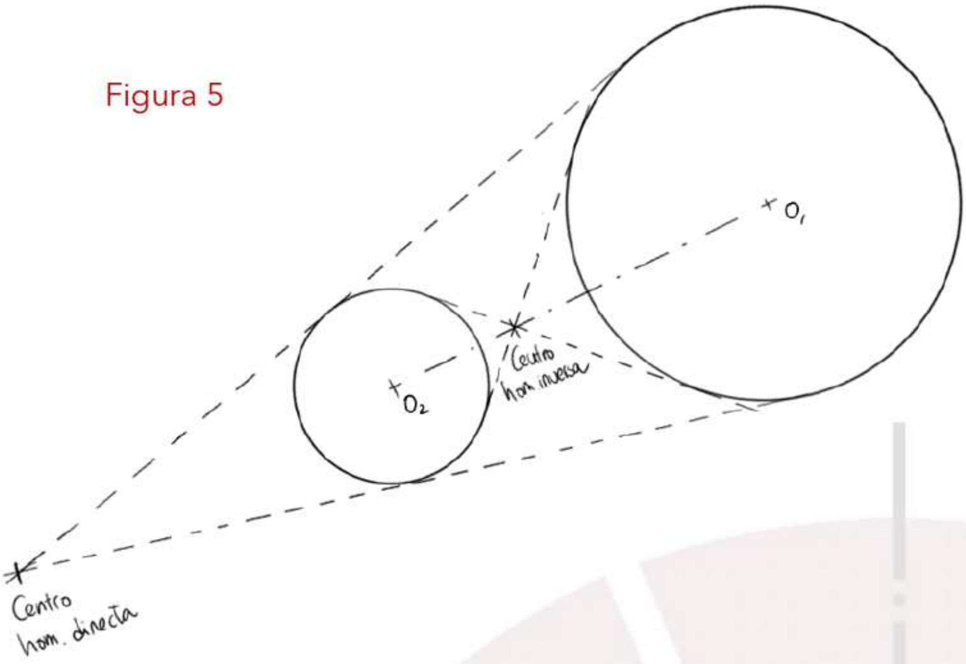


Figura 6

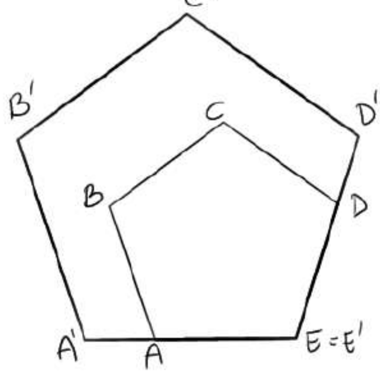


Figura 7

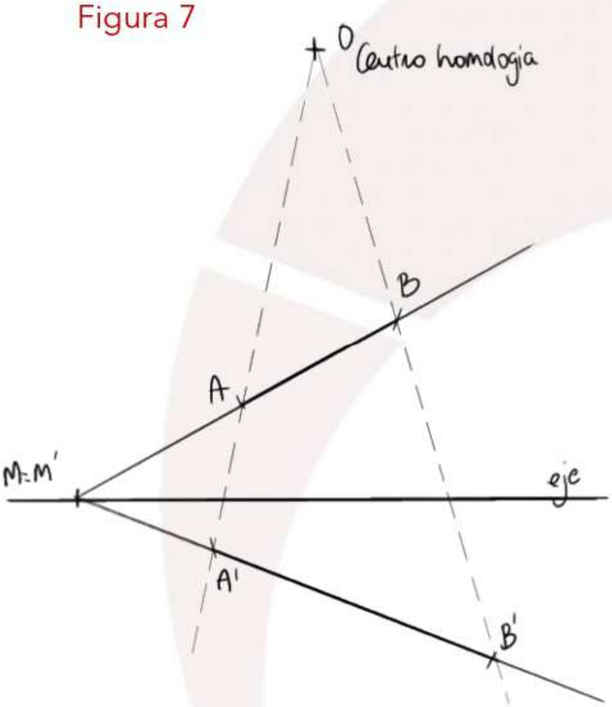


Figura 8

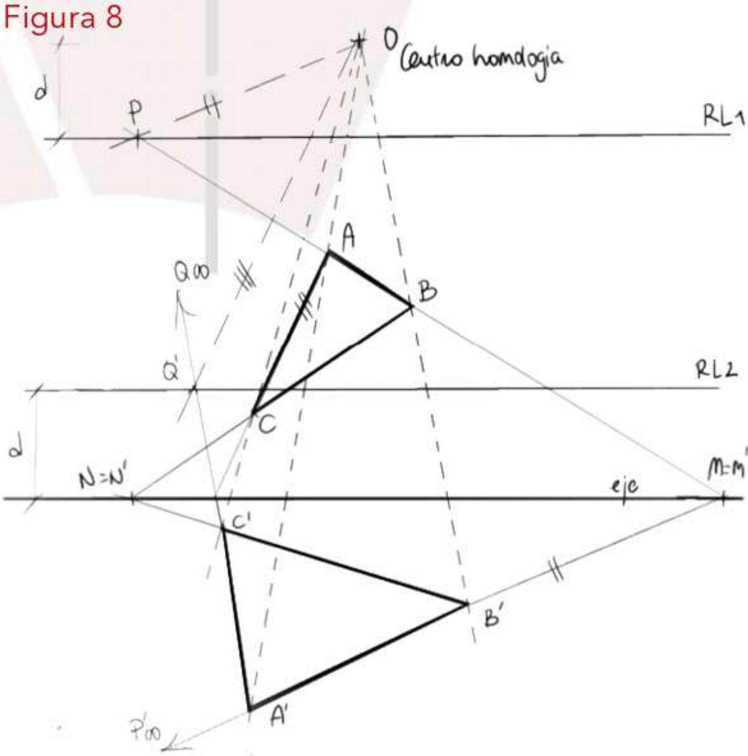


Figura 9

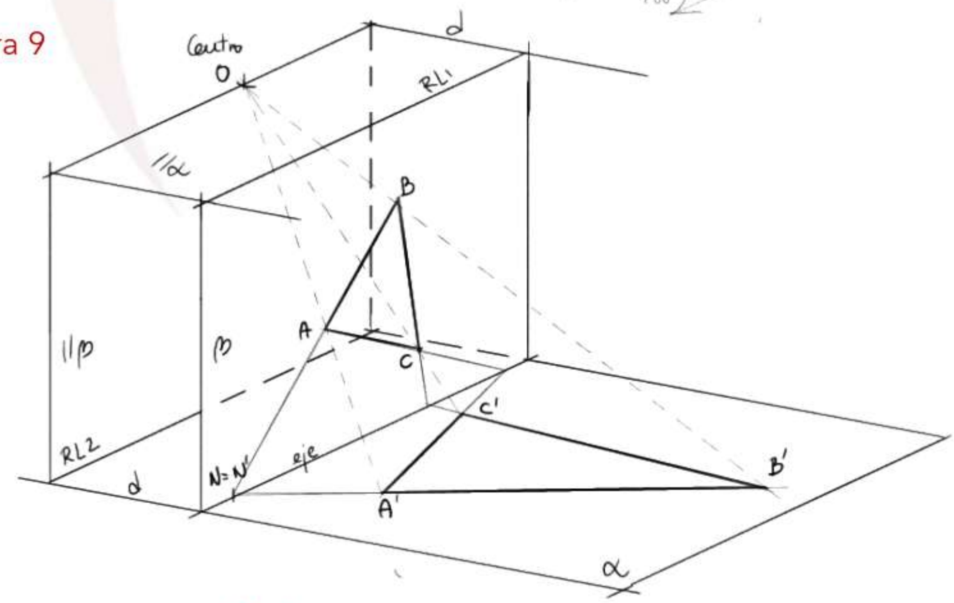


Figura 10

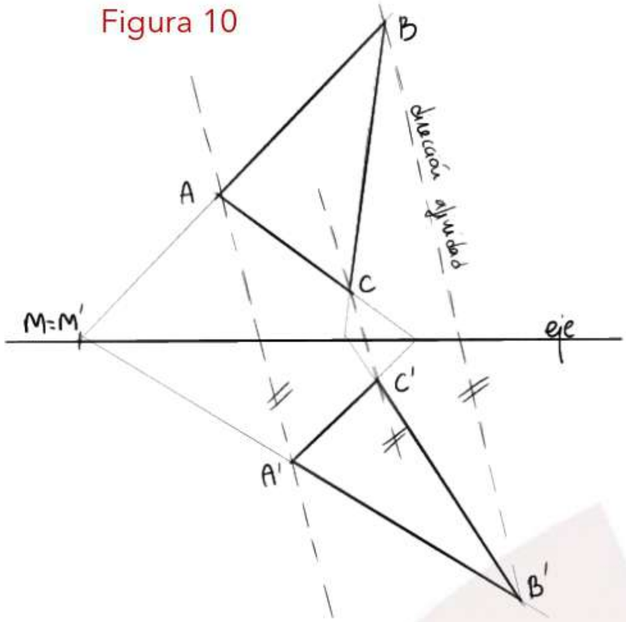


Figura 11

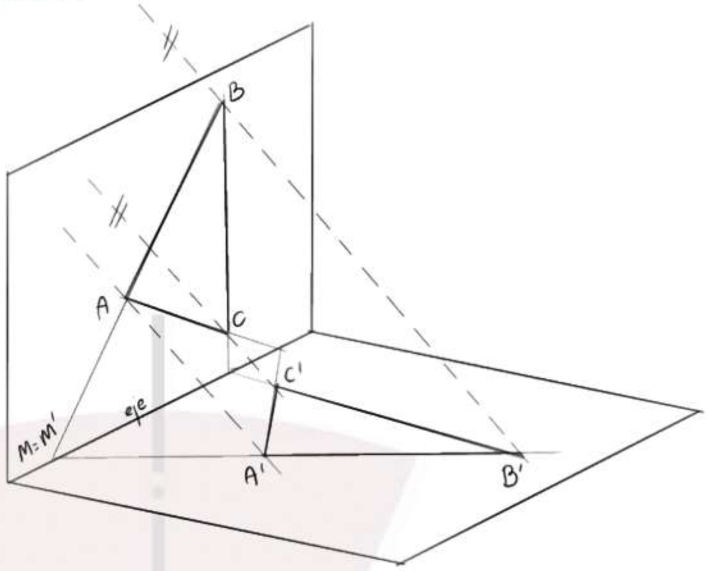


Figura 12

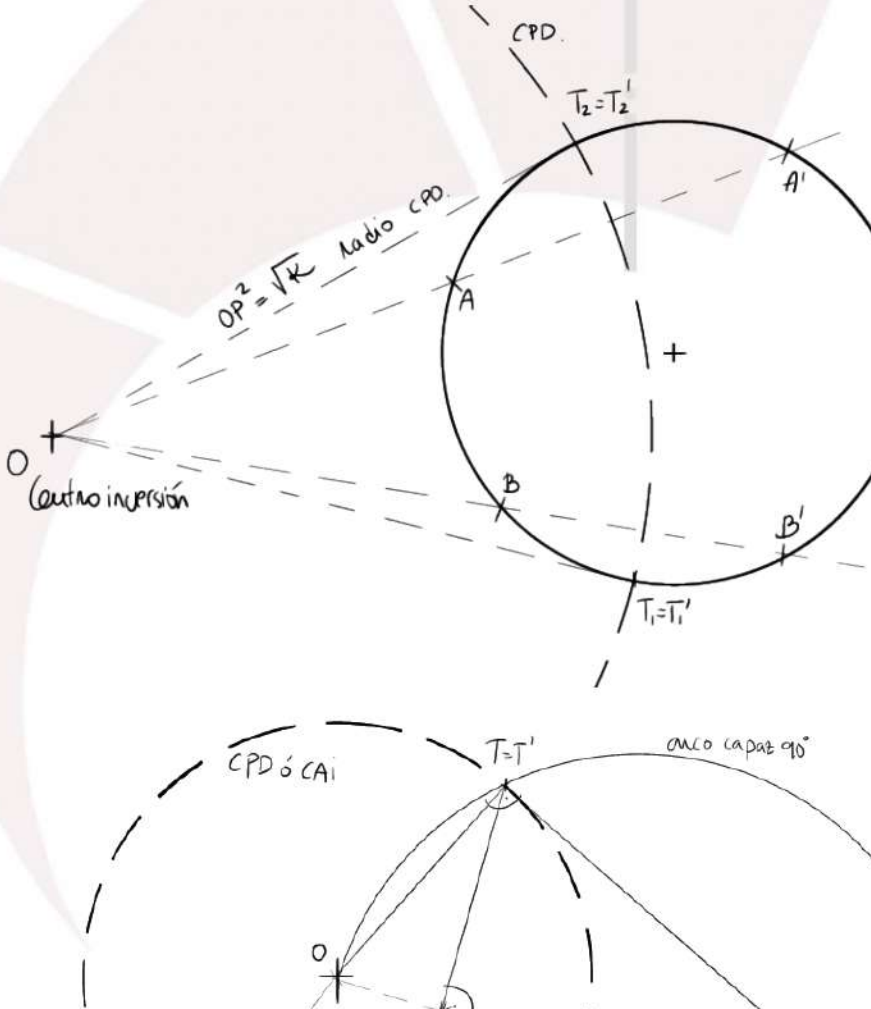


Figura 13