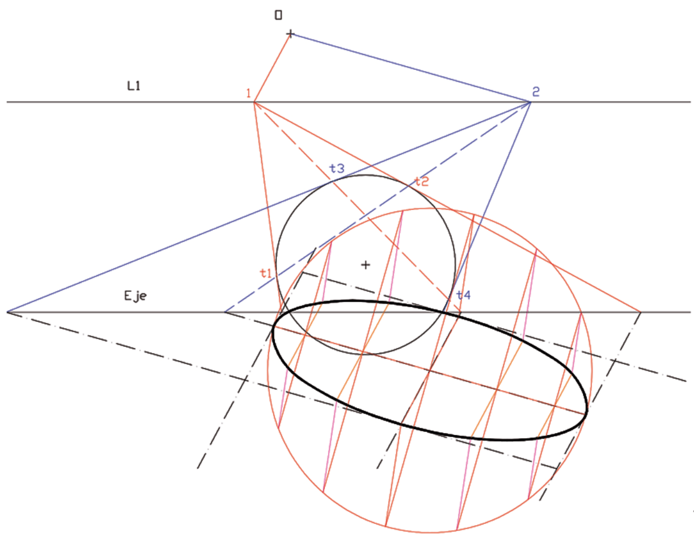
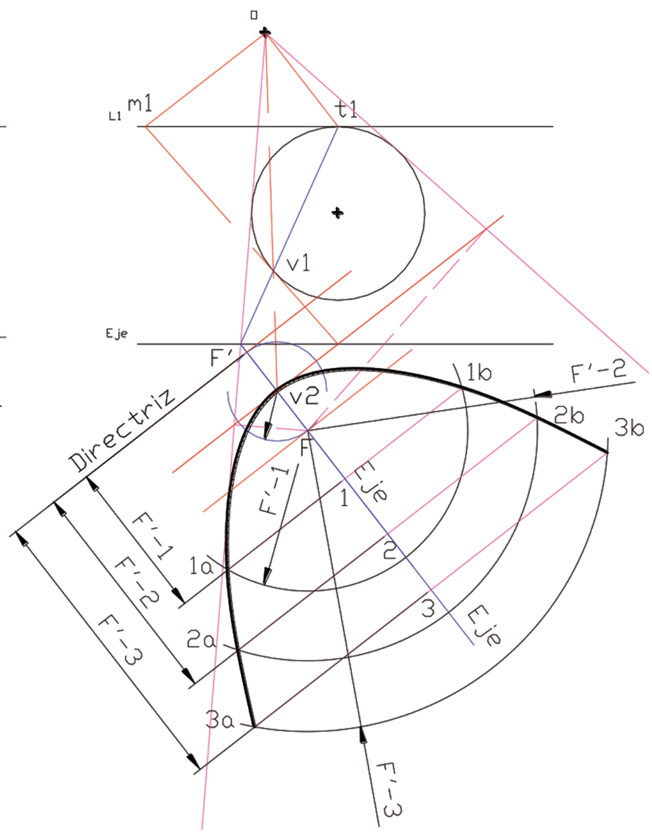
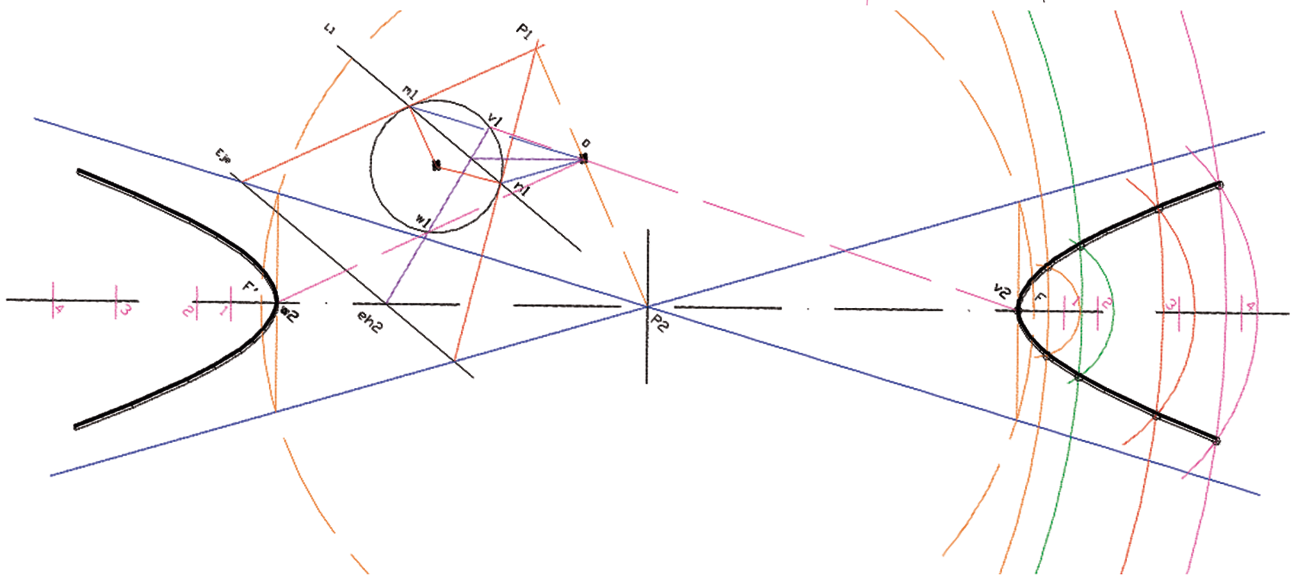
HOMOLOGÍAS

TRANSFORMACIÓN DE CIRCUNFENRECIA EN UNA CURVA CÓNICA



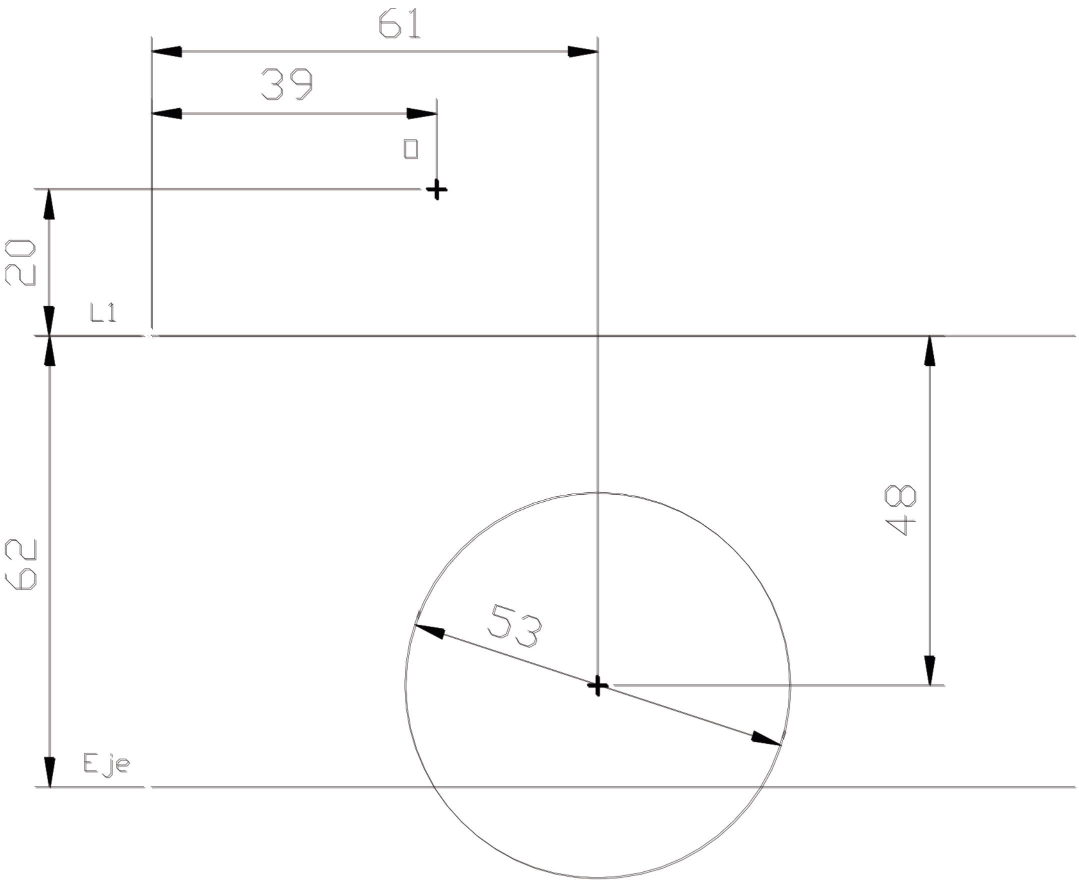




TRANSFORMACIÓN: DE CIRCUNFENRECIA A ELIPSE

Transformación homológica de una circunferencia en una elipse.

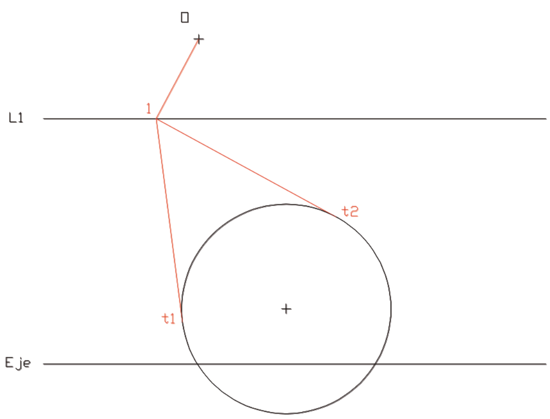
Datos centro O, eje E y recta limite de la primera forma L1, así como la circunferencia de centro y diámetros dados.

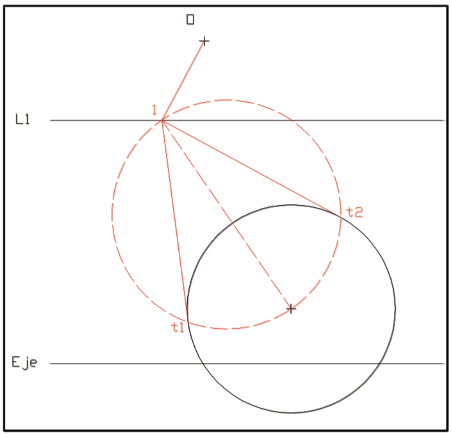


Se considera a la circunferencia dada un elemento de la primera forma, y a la elipse buscada, un elemento de la segunda forma.

El resultado de la transformación será una elipse porque la circunferencia dada no corta a la recta límite de la primera forma.

Desde el centro O se traza una recta arbitraria que corta a la recta límite de la primera forma L1 en un punto 1, desde donde se trazan las rectas tangentes a la circunferencia dada, con puntos de tangencia t1 y t2.

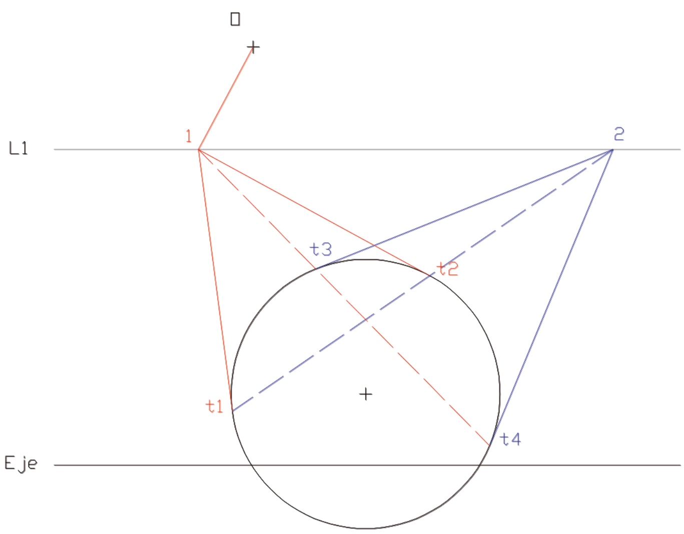




***Nota**: para obtener las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, basta con unir dicho punto con el centro de la circunferencia y trazar una circunferencia desde el punto medio de dicho segmento y radio la mitad de su valor. Los puntos donde corte a la primera circunferencia serán los puntos de tangencia.*

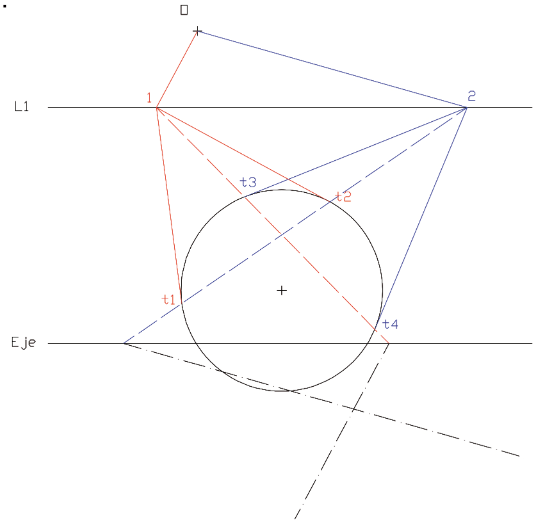
Al unir mediante una recta los puntos t1 y t2, y prolongarlos hasta L1, se obtiene el punto 2, desde donde se trazan rectas tangentes a la circunferencia, con puntos de tangencia t3 y t4.

Al unir mediante una recta los puntos de tangencia t3 y t4 y prolongarlos hasta L1, se comprueba que dicha recta pasa por el punto 1.



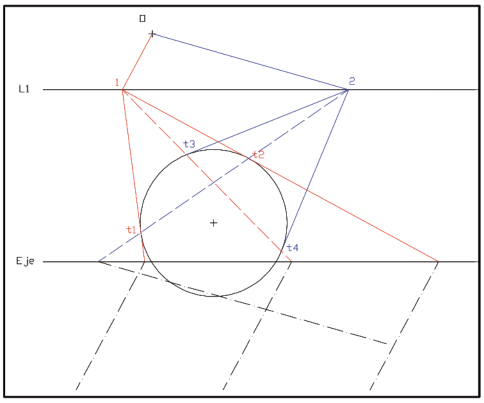
Considerando las construcciones realizadas hasta ahora como elementos de la primera forma (antes de la transformación solicitada), los diámetros conjugados de la elipse buscada (constituirá la segunda forma) vienen dados por las rectas homológicas de t1-t2 y de t3-t4.

Las direcciones de los diámetros conjugados de la elipse vienen dadas por O-1 y O-2.

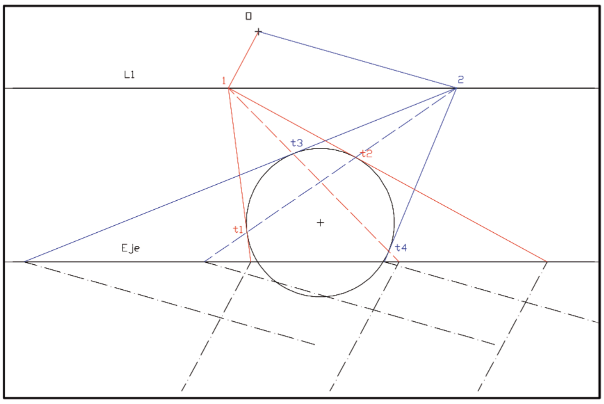


Las rectas tangentes a la elipse (segunda forma) vienen dadas por las rectas homológicas de las rectas tangentes a la circunferencia (primera forma).

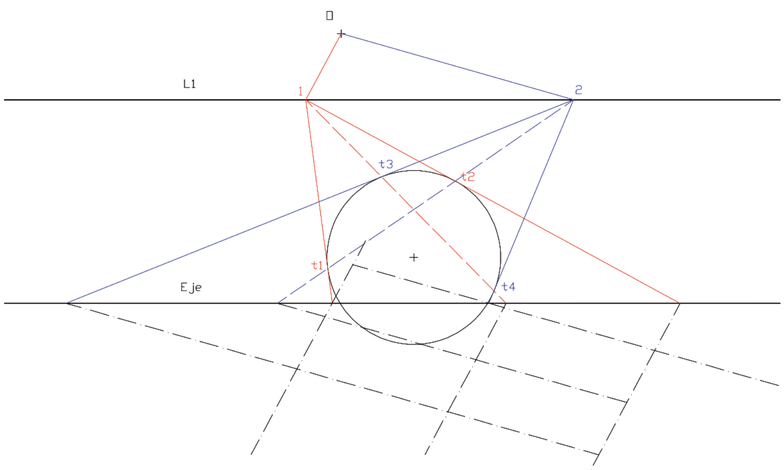
Rectas 1-t1 y 1-t2 (dirección O-1).



Rectas 2-t3 y 2-t4 (dirección O-2).



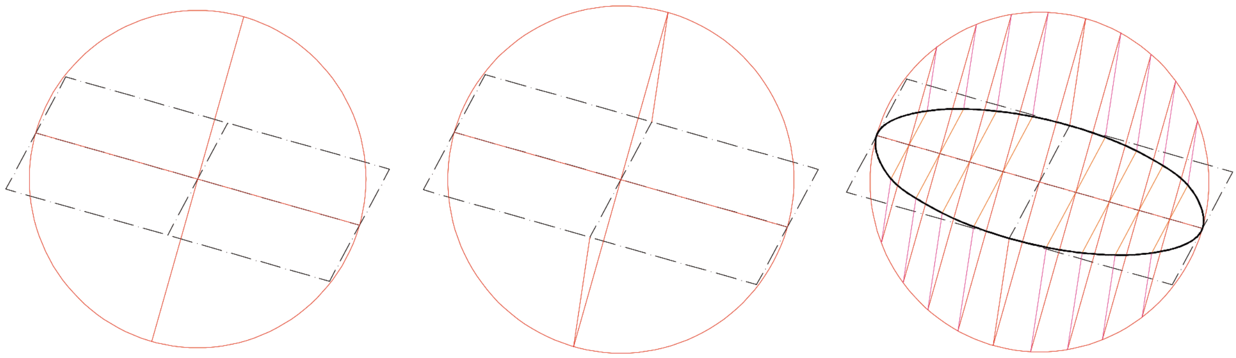
Con los diámetros conjugados de la elipse y las tangentes obtenidas, ya se puede dibujar la elipse buscada.



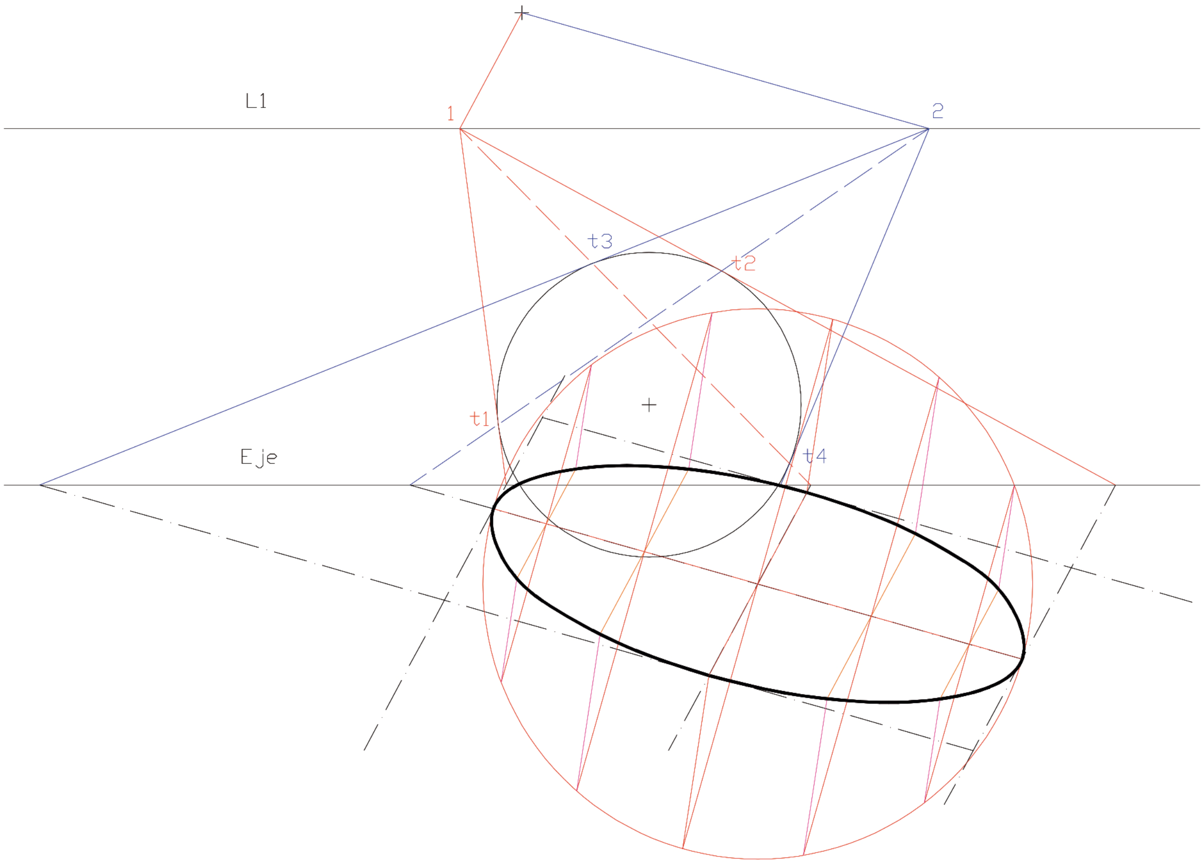
Construcción de una elipse dados sus diámetros conjugados.

Se toma uno de los diámetros conjugados como diámetro de una circunferencia, y se traza el diámetro perpendicular al anterior.

Al unir los puntos extremos de los diámetros (los diámetros conjugados de la elipse y los de la circunferencia trazada) se obtiene la “dirección” de la transformación aplicada (es una afinidad).



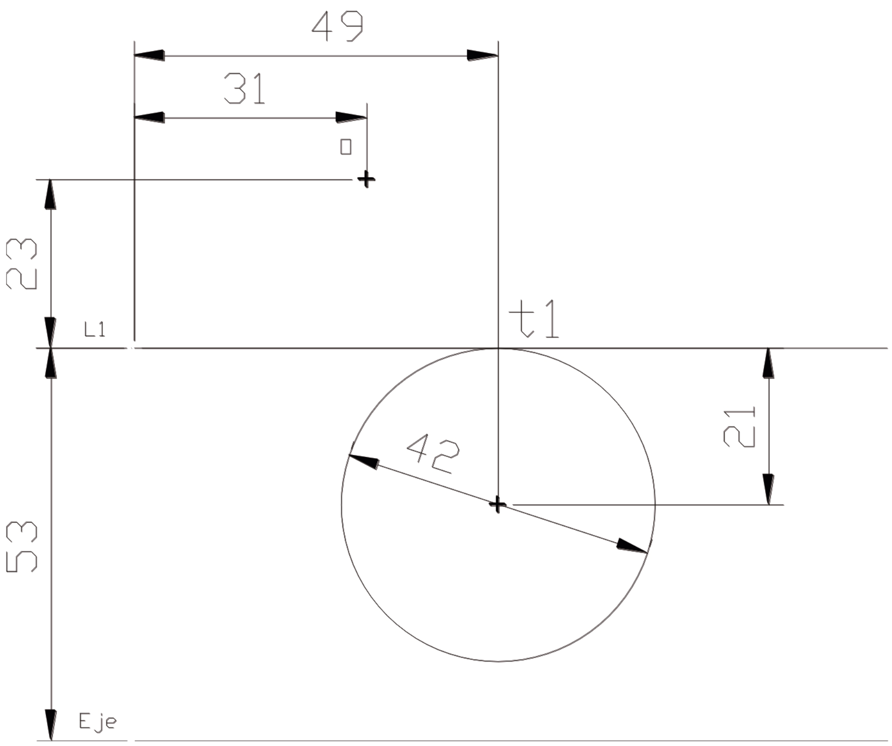
Resolución completa del ejercicio.



TRANSFORMACIÓN:
DE CIRCUNFENRECIA A PARÁBOLA

Transformación homológica de una circunferencia en una parábola.

Datos centro O, eje E y recta limite de la primera forma L1, así como la circunferencia de centro y diámetros dados. La circunferencia es tangente en el punto t1 a la recta límite de la primera forma.

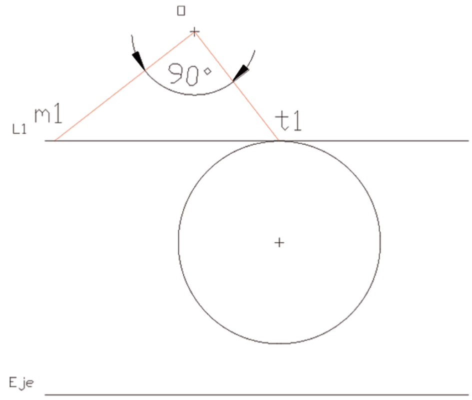


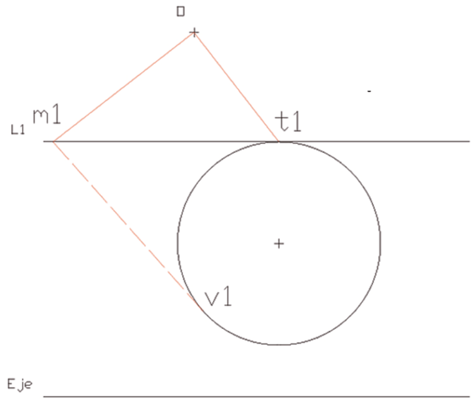
Se considera a la circunferencia dada un elemento de la primera forma, y a la parábola buscada, un elemento de la segunda forma.

El resultado de la transformación será una parábola porque la circunferencia dada corta a la recta límite de la primera forma en un punto (son tangentes). El homológico del punto de tangencia estará en el infinito (por pertenecer a la recta límite de la primera forma).

Obtención del eje y de la dirección de la directriz de la parábola.

Desde el punto de tangencia t1 (en la recta límite de la primera forma L1), trazamos una recta hasta el centro de la homología (punto O); a 90º de dicha recta, trazamos una recta que cortará a L1 en un punto m1.

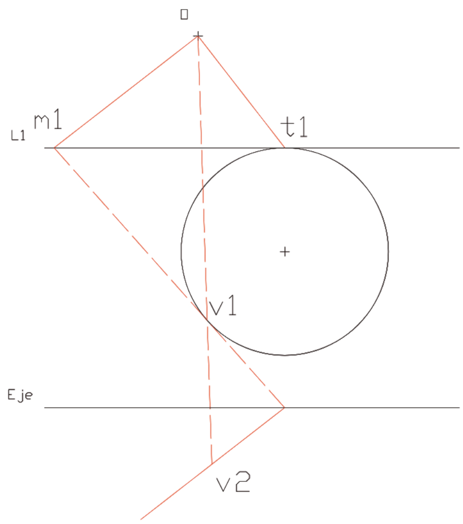


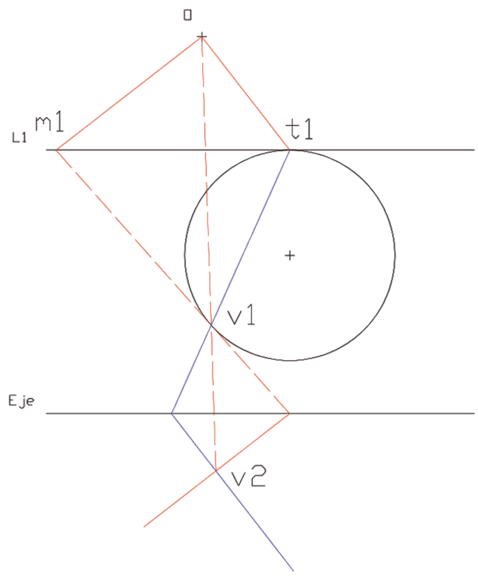


Desde el punto m1 se traza la recta tangente a la circunferencia, obteniendo el punto de tangencia v1.

El punto homológico de t1 está en el infinito (t1 pertenece a L1), de forma que la recta homológica de la recta v1-t1 (es decir, v2-t2, o lo que es lo mismo v2-∞) representa la dirección del eje de la parábola, y el punto homológico de v1 (v2) representa el vértice de la parábola.

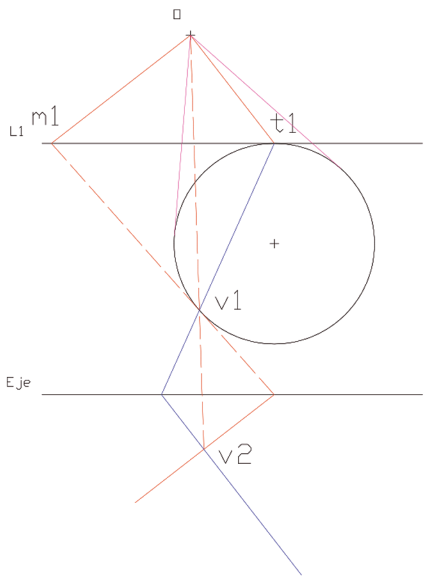
La recta límite de la primera forma es tangente a la circunferencia. La recta homológica de la otra tangente dibujada, es decir, la recta homológica de v1-m1, representa la recta perpendicular al eje en el vértice (tangente a la parábola en el vértice, y paralela a la directriz).





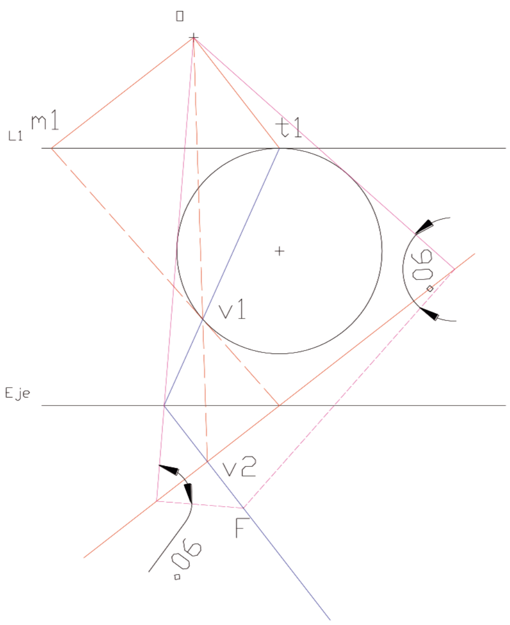
Obtención del foco de la parábola.

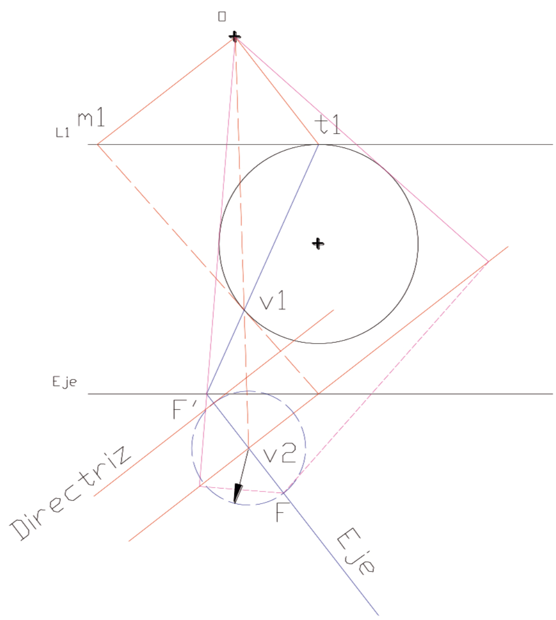
Se dibujan las rectas tangentes a la circunferencia desde el centro de la homología (punto O). Al ser trazadas desde el centro de la homología, serán tangentes a la circunferencia (primera forma) y a la parábola (segunda).



Se prolongan dichas rectas tangentes hasta que corten a la tangente a la parábola en el vértice v2, y a partir de dichos puntos se trazan rectas que cortarán al eje de la parábola en el punto F, que es el foco de la parábola.

Para obtener la directriz basta con trazar una perpendicular al eje de la parábola a una distancia igual a v2-F, y así se obtiene el punto F'.

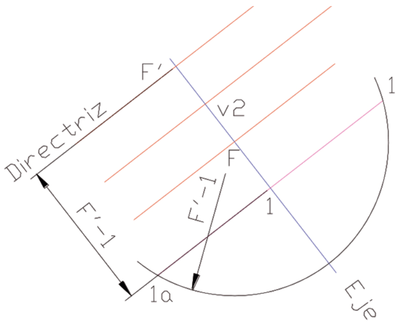


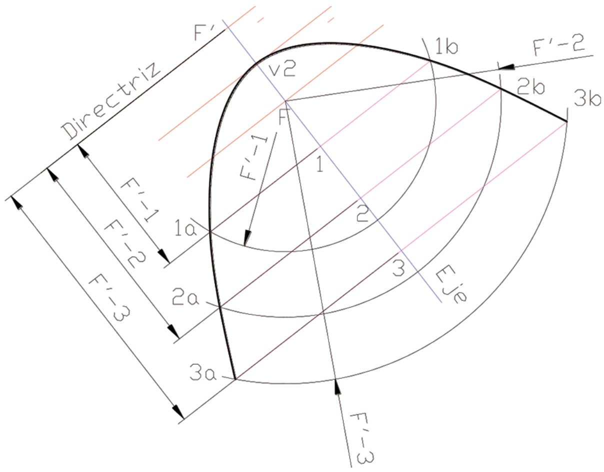


Construcción de una parábola conociendo la directriz y el foco.

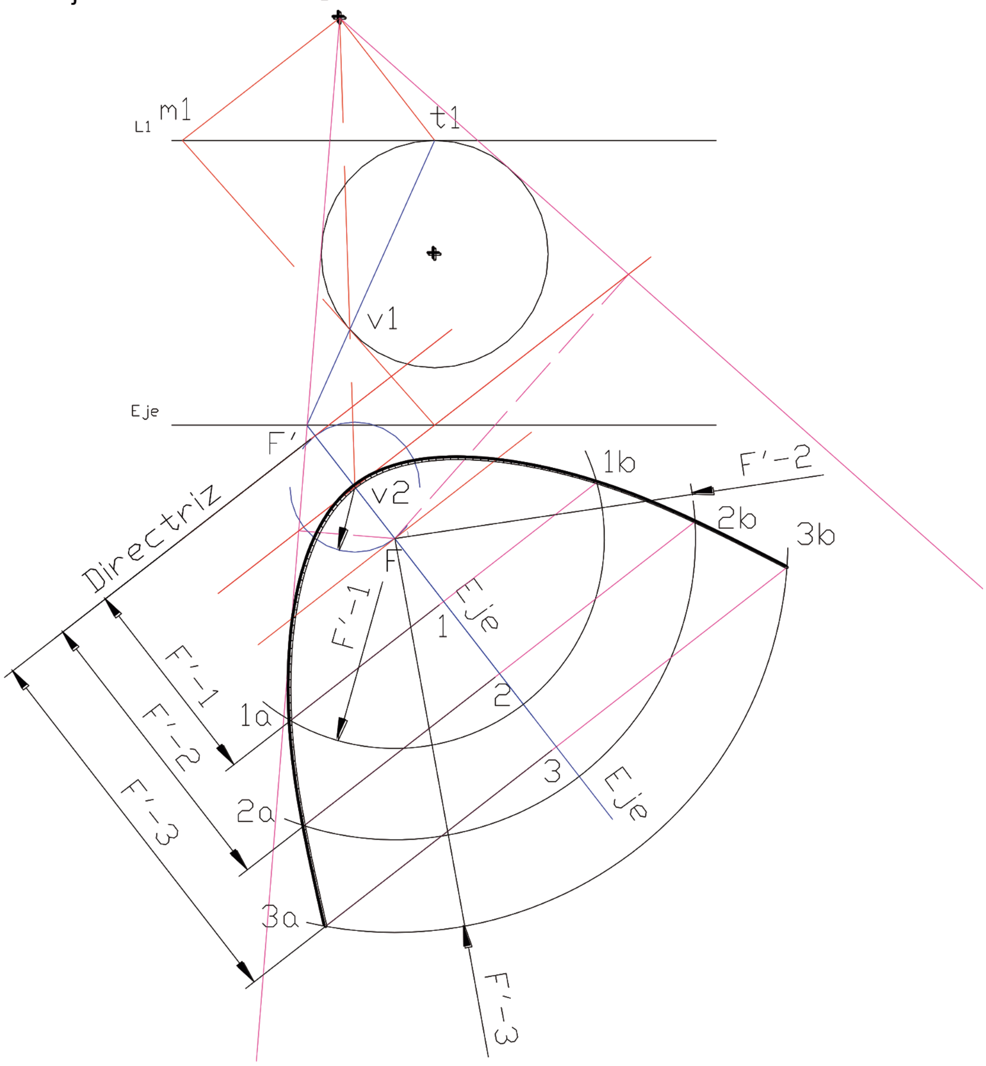
A partir del foco F se sitúan puntos arbitrarios: 1, 2, 3, etc., y por ellos se trazan paralelas a la directriz.

Tomando como radios las distancias F'-1, F'-2, etc., y haciendo siempre centro en el punto F, se trazan arcos que cortan, respectivamente, a las rectas que pasan por 1, 2, 3, etc., obteniéndose los puntos a1 y a2, b1 y b2, y así sucesivamente.





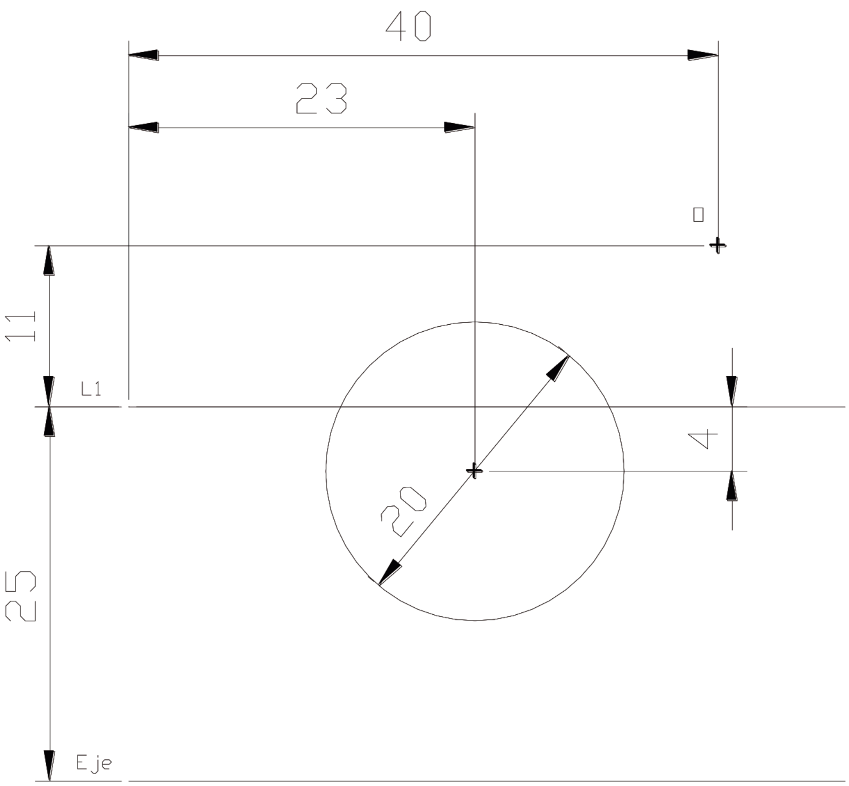
Resolución completa del ejercicio.



TRANSFORMACIÓN:
DE CIRCUNFENRECIA A HIPÉRBOLA

Transformación homológica de una circunferencia en una hipérbola.

Datos centro O, eje E y recta limite de la primera forma L1, así como la circunferencia de centro y diámetros dados. La circunferencia corta en dos puntos a la recta límite de la primera forma.

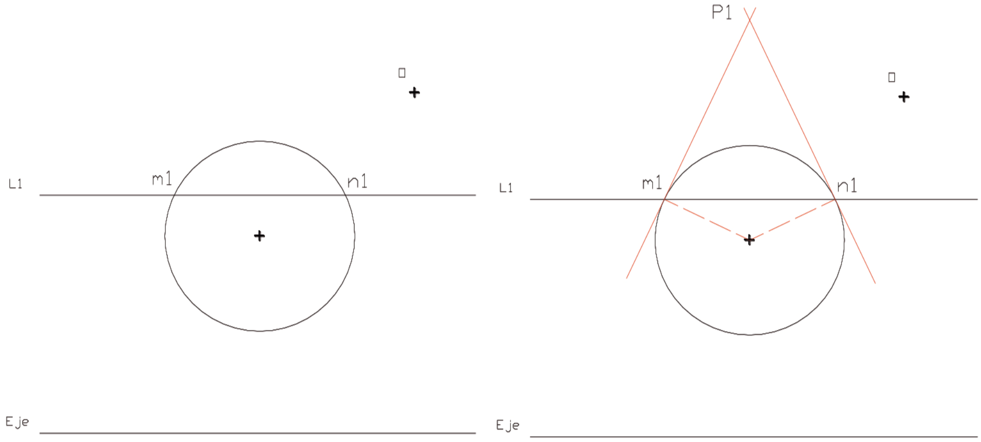


Se considera a la circunferencia dada un elemento de la primera forma, y a la hipérbola buscada, un elemento de la segunda forma.

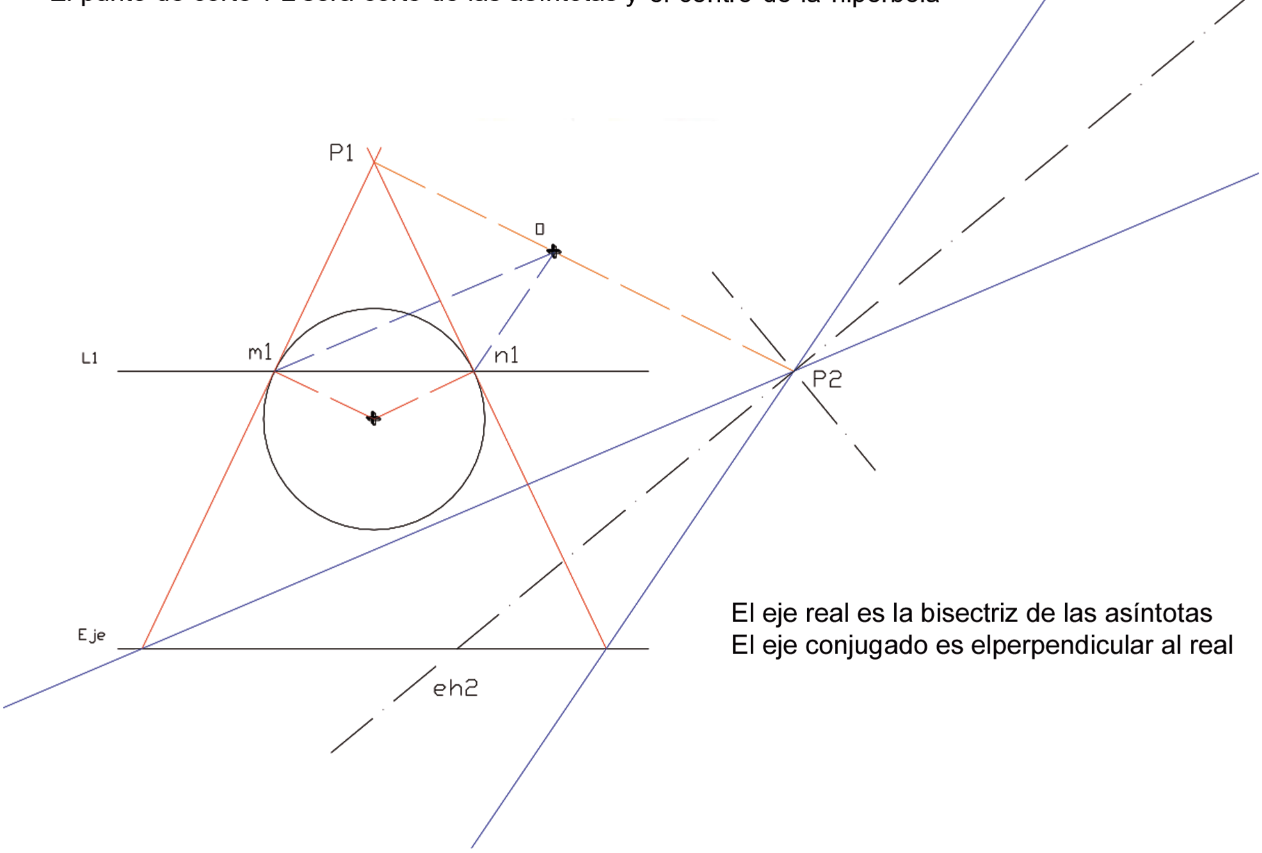
El resultado de la transformación será una hipérbola porque la circunferencia dada corta a la recta límite de la primera forma en dos puntos. Los homológicos de los puntos de corte estarán en el infinito (por pertenecer a la recta límite de la primera forma).

La circunferencia corta a la recta límite en dos puntos (n1,m1). Los homológicos de dichos puntos estarán en el infinito. Se determinan las rectas tangentes a la circunferencia en n1, en m1 y el punto de corte P1.

La tangencia se conserva en la homología: una recta tangente a la circunferencia tendrá como recta homóloga a una recta tangente a la hipérbola. Los puntos de tangencia en la primera forma tendrán como puntos homológicos a puntos de tangencia en la segunda forma.



Como n1 y m1 pertenecen a la recta límite, sus homológicos estarán en el infinito, así las rectas homólogas de las tangentes a la circunferencia, serán tangentes a la hipérbola en el infinito, es decir, serán las rectas asíntotas.
El punto de corte P2 será corte de las asíntotas y el centro de la hipérbola



El eje real es la bisectriz de las asíntotas
El eje conjugado es elperpendicular al real

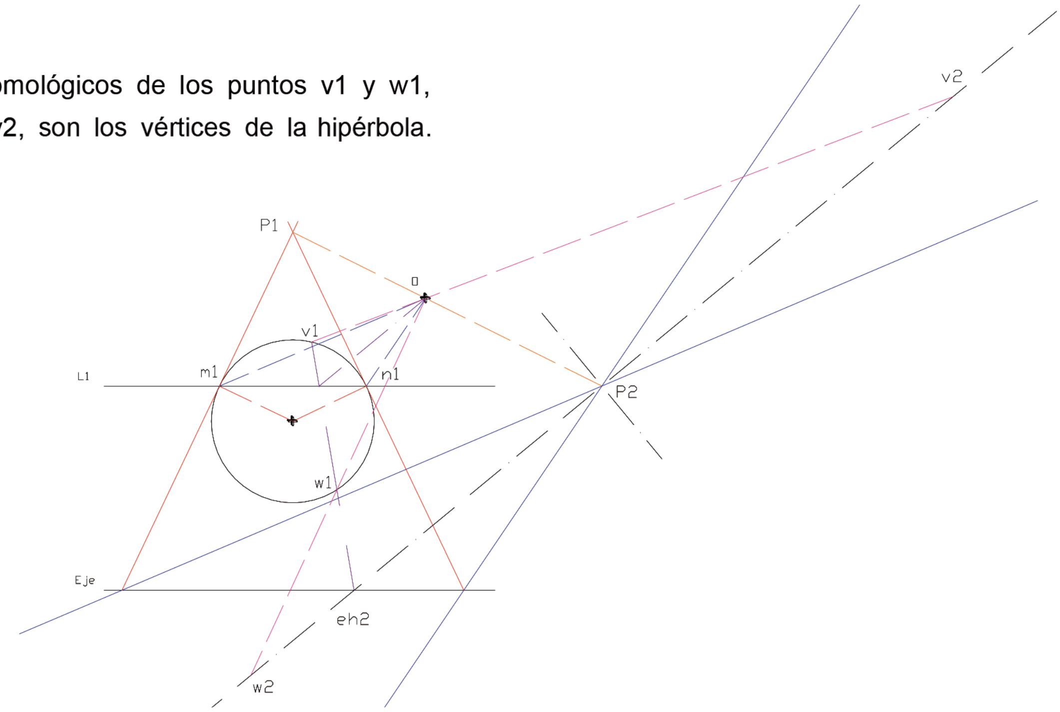
APUNTES GEOMETRÍA

HOMOLOGÍAS
CURVAS CÓNICAS

Para determinar los vértices de la hipérbola:

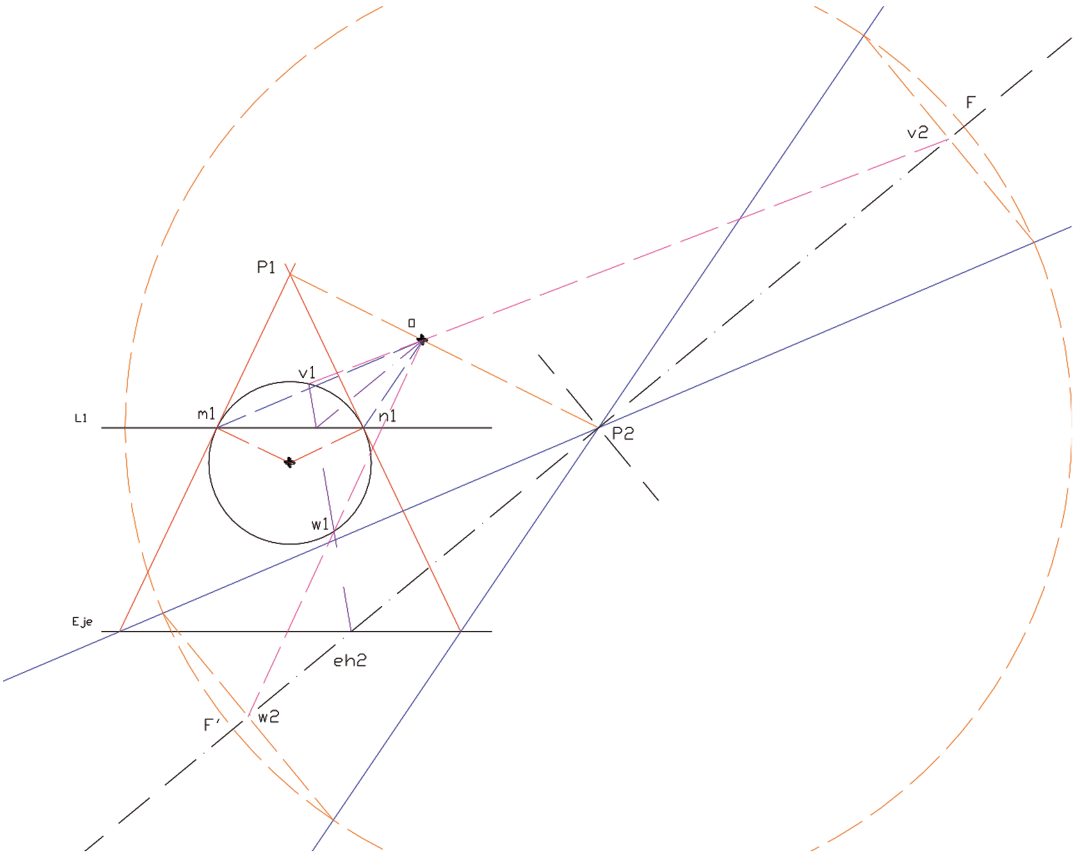
Para ello se traza una paralela al eje real por el centro de la homología. Dicha recta pasa por punto de corte del eje real con el eje, Esta recta corta a la circunferencia en los puntos v1 y w1.

Los homológicos de los puntos v1 y w1, v2 y w2, son los vértices de la hipérbola.



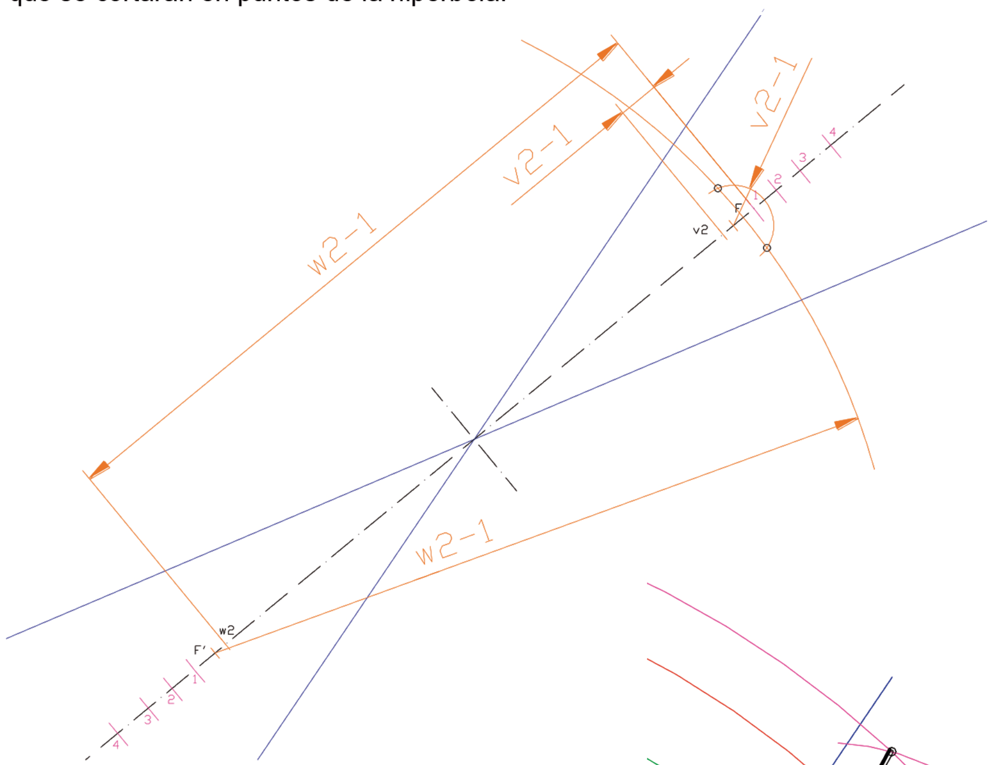
Obtención de los focos de la hipérbola.

Se trazan rectas perpendiculares al eje real a partir de los vértices v2 y w2. Con centro en el punto P2 y radio el determinado sobre las asíntotas por los puntos de corte de dichas perpendiculares y el centro, se traza una circunferencia que cortará al eje real en los puntos F y F', focos de la hipérbola.



Conocidos los ejes, las asíntotas, el centro, los vértices y los focos, ya se puede determinar la hipérbola. Para ello se determinan puntos 1, 2, 3, 4, distribuidos sobre el eje real a partir de los puntos F y F'.

Ejemplo: punto 1. Con radios w2-1 y v2-1 se trazan circunferencias de centros F y F', que se cortarán en puntos de la hipérbola.



Resolución completa del ejercicio.