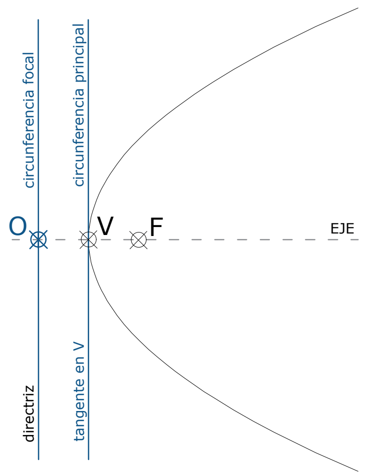
GEOMETRÍA CURVAS CÓNICAS: Parábolas

PARÁBOLA: DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIONES

Una parábola es una curva cónica abierta y plana de una sola rama, producida por la sección de un cono recto con un plano paralelo a una de sus generatrices.
Es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija, foco y directriz respectivamente.



- Eje marca la simetría de la curva
- Vértice colocado sobre el eje y equidistante de d y F.
- Foco es el punto de tangencia de la esfera inscrita en el cono con el plano de corte que contiene a la parábola.
- Directriz recta perpendicular al eje, resultado del corte del plano que contiene a los puntos de tangencia de la esfera inscrita en el cono con el plano que contiene a la parábola.
- Punto O corte del eje y la directriz

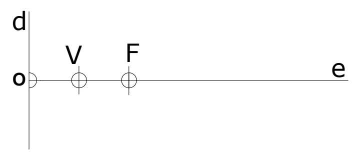
- Circunferencia principal, de radio infinito, es una recta tangente a la curva en el vértice y paralela a la directriz.
- Circunferencia focal, de radio infinito, es una recta coincidente con la directriz.

CONSTRUCCIÓN DE PARÁBOLAS

C1 MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN POR PUNTOS

Para comenzar el ejercicio necesitamos dos de estos tres datos: Directriz - Foco ó vértice.

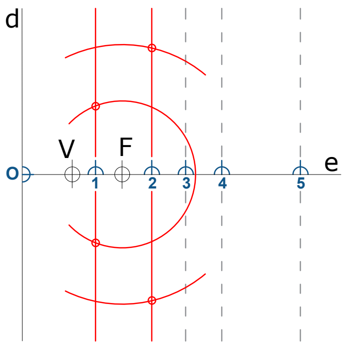
Sabemos que el eje es perpendicular a la directriz y contiene tanto a F como a V y conocemos que la distancia d-V es igual que V-F siendo el vértice el punto central.

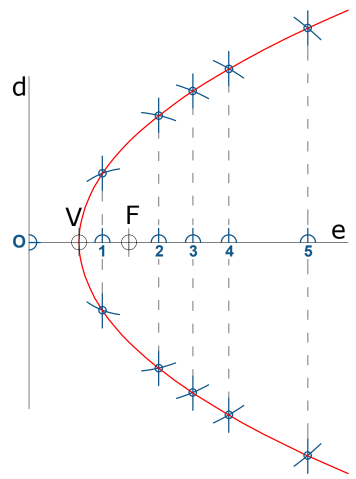


En las parábolas el valor de la EXCENTRICIDAD ES 1.
Eso quiere decir que la distancia de cualquier punto de la curva es constante e igual del foco al punto que del punto a la directriz (en perpendicular a esta)

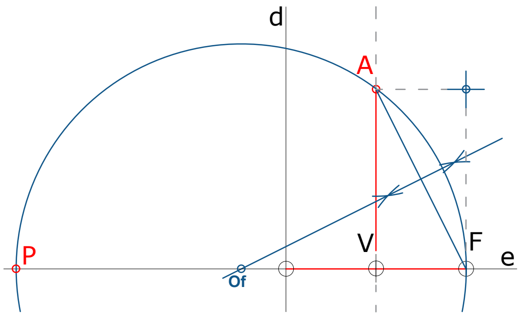
De manera que la excentricidad en la parábola no es un dato a tener en cuenta a la hora de dibujar la curva.

Para buscar puntos de la curva marcaremos sobre el eje unas divisiones numeradas 1,2,3...
1) Sobre cada división hacemos una paralela a d
2) Tomamos la distancia O1 y hacemos arco de compás sobre F y encontramos el corte con la recta de 1.
3) Repetimos con el resto de puntos.
La unión de todos será el trazado de la curva.





C2 MÉTODO DE SEMICIRCUNFERENCIAS

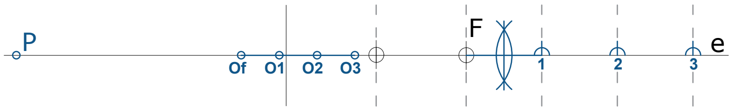


Mismos datos: <u>Directriz - Foco ó vértice</u>
El método es largo y nada práctico.

Vamos a buscar P, el punto de corte coincidente de las semicircunferencias que nos van a ayudar a trazar la curva.

1) Colocamos la distancia OF sobre la recta tangente que pasa por V y así obtenemos A.
2) Buscamos el corte de la recta mediatriz del segmento AF con el eje: Of
3) Trazamos una semicircunferencia hasta encontrar P, simétrico de F.

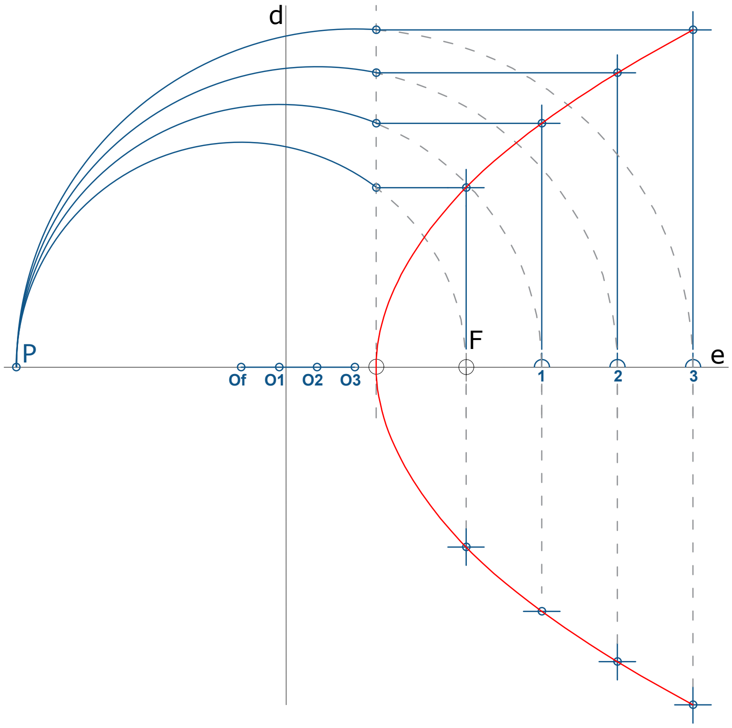
Para encontrar los dos primeros puntos de la parábola, trazamos desde F una recta paralela a la directriz y desde A una perpendicular. El punto de corte su simétrico respecto el eje son puntos del trazado.



4) Marcamos divisiones sobre el eje equidistantes 1,2,3...
5) Ahora necesitamos conocer los centros de las semicir-cunferencias. Podemos hacerlo de dos formas:

- Colocamos desde Of la mitad de la medida F-1, y nos saldrán los centros.
- Buscamos el diámetro de cada circunferencia P-1, P-2 y P-3 y en el medio de cada uno estará su centro.

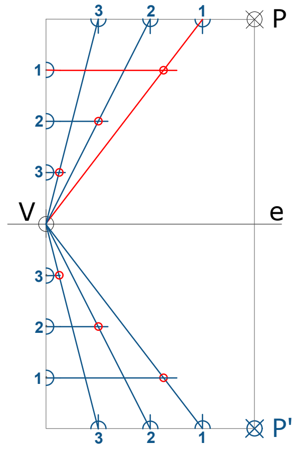
6) Con centro en O1, O2 y O3, y radio hasta P, trazamos los arcos hasta cortar con la recta tangente.
7) Desde los puntos de corte, dibujamos perpendiculares a la directriz que cortarán con las rectas paralelas que salen de cada punto correspondiente.
8) Hacemos la parte simétrica respecto al eje y podemos trazar la parábola.

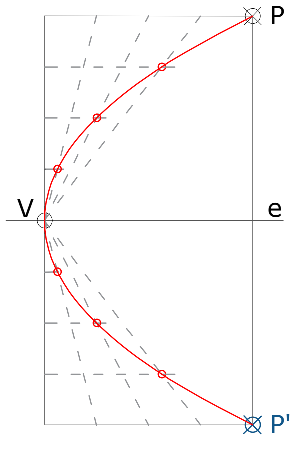


C3 CONSTRUCCIÓN DADO EL EJE, EL VÉRTICE Y UN PUNTO DE LA CURVA. Método 1

Lo primero que vamos a hacer es crear un rectángulo con dos paralelas al eje desde P y P' (su simétrico) y dos perpendiculares por V y P-P'.

2) dividimos los lados menores en un número de partes iguales, y dividimos el lado que contiene al vértice en el doble de partes y numerándolas teniendo en cuenta su componente simétrica.
3) Trazamos las rectas que unen las divisiones de los lados menores con V y las rectas paralelas al eje desde las divisiones del lado largo.
4) En los puntos de corte correspondientes, encontramos puntos del trazado de la parábola.

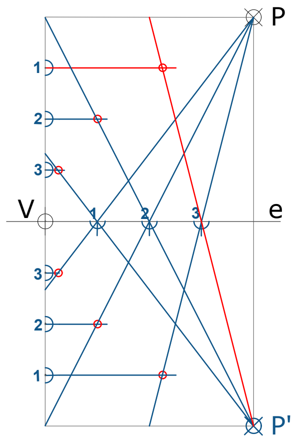


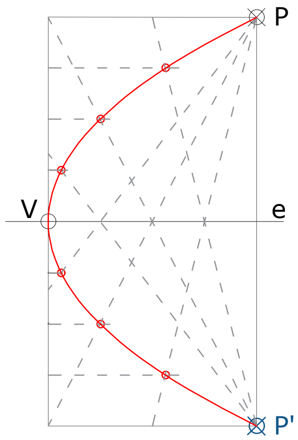


C4 CONSTRUCCIÓN DADO EL EJE, EL VÉRTICE Y UN PUNTO DE LA CURVA. Método 2

Igual que en el ejercicio anterior generamos un rectángulo que pase por P, P' y V con paralelas y perpendiculares al eje.

1) Dividimos el segmento del eje limitado por el rectángulo en partes iguales, numerándolas del vértice "hacia fuera"
2) Dividimos también el lado mayor en el doble de partes, numerándolas de forma simétrica de fuera hacia dentro.
3) Trazamos rectas desde P y P' que pasen por las divisiones transversales y rectas paralelas al eje desde las divisiones del lado largo.
4) En los puntos de corte correspondientes, encontramos puntos del trazado de la parábola.



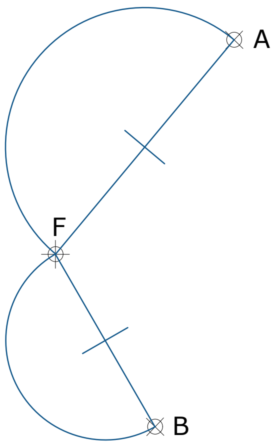


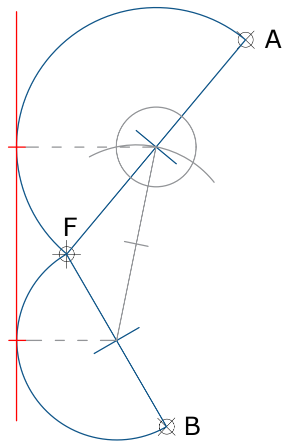
C5 CONSTRUCCIÓN DADO EL FOCO Y DOS PUNTOS DE LA CURVA

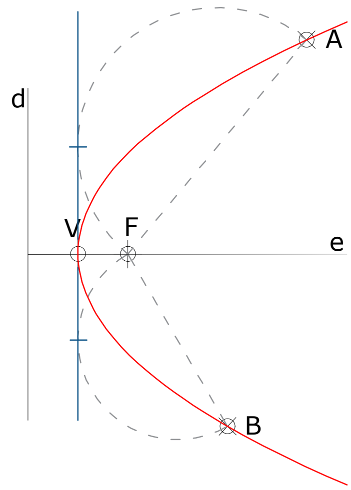
Conocidos los puntos A y B, los unimos con el foco y trazamos semicircunferencias con diámetros AF y BF orientadas ambas hacia el lado del foco.

Necesitamos encontrar la recta tangente a ambas circunferencias por el procedimiento de "rectas tangentes a dos circunferencias" habitual. Esta recta es la tangente a la parábola en el vértice y por tanto perpendicular al eje.

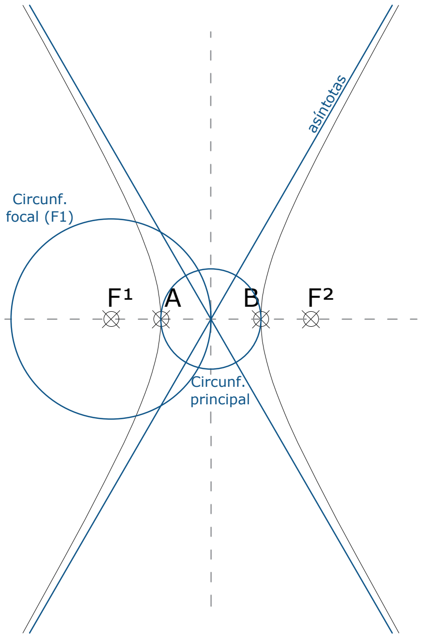
Como tenemos el foco y esta dirección podemos colocar el resto de datos: eje, vértice y directriz.
Para encontrar más puntos del trazado tendremos que buscarlos mediante cualquiera de los métodos anteriores.







HIPÉRBOLA: DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIONES



Una hipérbola es una curva cónica abierta y plana de dos ramas, producida por la sección de un cono recto con un plano paralelo al eje. Es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano en la que las distancias a otros dos puntos fijos (los focos) es constante.

- AB eje real
- CD eje imaginario (infinito)

Perpendiculares entre sí
Cortan en el centro de la elipse
Ejes de simetría

- Vértices: colocados sobre el eje real, mínima distancia entre ramas.
- Focos: puntos de tangencia de las esferas inscritas en el cono con el plano de corte que contiene a la hipérbola.
- DISTANCIA FOCAL: Distancia entre focos
- Circunferencia principal: diámetro AB
- Circunferencia focal: radio AB y centro uno de los focos
- RADIOS VECTORES: Distancia desde cualquier punto de la curva a los focos. El valor absoluto de la resta de estas distancias es constante e igual al eje AB.

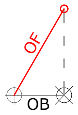
$$|F^1P - F^2P| = AB = \text{constante}$$

- ASÍNTOTAS: Son las rectas tangentes a la hipérbola en el infinito.

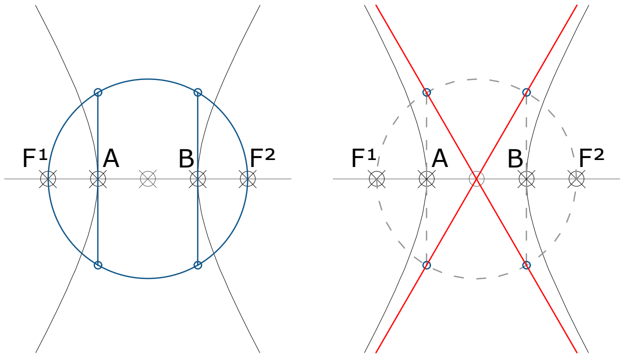
AS DADA UNA HIPÉRBOLA DETERMINAR SUS ASÍNTOTAS

Para encontrar las asíntotas de una hipérbola, trazamos una circunferencia desde el centro y hasta los focos. Sobre los vértices A y B dibujamos rectas perpendiculares al eje que corten a la circunferencia. Al unir los puntos de corte y el centro de la curva obtendremos las asíntotas.

Toda asíntota cumple el Teorema de Pitágoras, entendiendo que la ASÍNTOTA es la hipotenusa y es la medida del centro al foco y que un cateto es la medida del centro al vértice.



Teorema de Pitágoras $a^2=b^2+c^2$
Sea a como distancia OF y b como distancia OA u OB



Se denomina HIPÉRBOLA EQUILÁTERA cuando las asíntotas forman 45º respecto a los ejes.

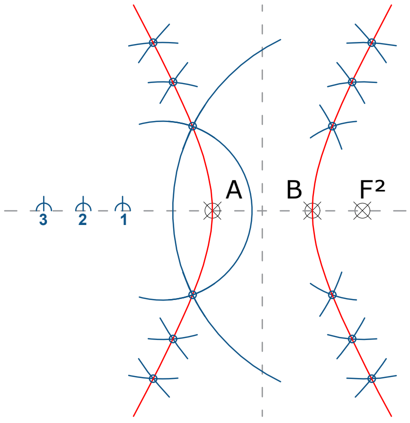
CONSTRUCCIÓN DE HIPÉRBOLAS

C1 MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN POR PUNTOS

Dado el eje real AB y la posición de los focos F1 y F2:

1) Marcamos puntos sobre la recta del eje real desde uno de los focos y hacía el exterior:1, 2, 3...
2) Tomamos la distancia A1 y hacemos arco de compás sobre F1 | distancia B1 y pinchamos sobre F2. De esta forma encontraremos dos puntos de corte que pertenecen al trazado de la curva.
3) Con el mismo sistema repetimos con el resto de puntos.

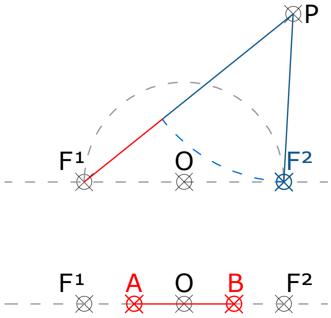
Al unir los puntos dibujaremos las dos ramas de la hipérbola.



C2 CONSTRUCCIÓN DADO UN FOCO, EL CENTRO Y UN PUNTO DE LA CURVA

Dado un foco y el centro, dibujamos la recta del eje real. Y simétricamente sacamos F2. Como la resta de los radios vectores desde cualquier punto de la curva es igual a la medida del eje AB, la calculamos y la colocamos media a cada lado desde el centro.

De esta forma ya tenemos datos para dibujar la hipérbola por el método anterior.

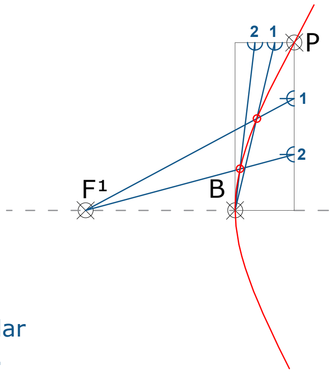


C3 CONSTRUCCIÓN DADO UN FOCO, UN VÉRTICE Y UN PUNTO DE LA CURVA

Este procedimiento requiere que nos den un vértice y un punto de la misma rama de la hipérbola y el foco opuesto.Y nos va a permitir sacar únicamente esta rama.

Si conocemos algún dato más, como el otro vértice, el otro foco o el centro de los ejes, entonces podremos realizar la simetría y trazar la segunda rama.

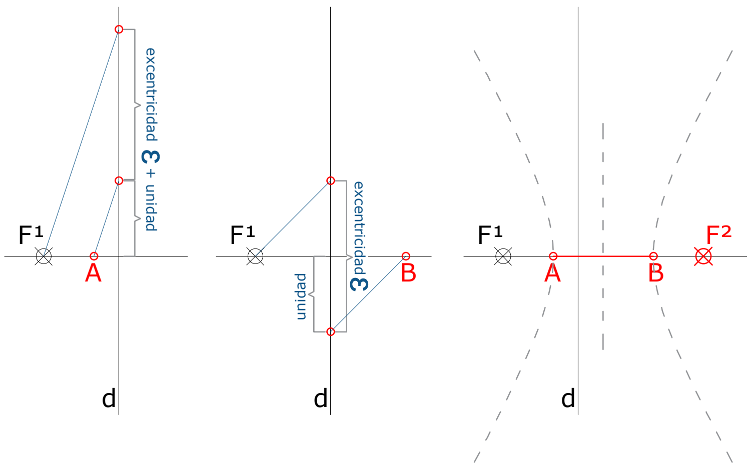
1) Al unir foco y vértice tenemos la dirección del eje real. Desde el vértice y el punto dado P trazamos un rectángulo mediante perpendiculares y paralelas al eje.
2) Los dos lados que parten de P se dividen en el mismo número de partes iguales numerándolas desde P "hacia fuera".
3) Los puntos sobre la paralela al eje se unen con el vértice y los puntos en la perpendicular se unen con el foco. En sus intersecciones encontramos puntos del trazado de la curva.



C4 CONSTRUCCIÓN DADA LA DIRECTRIZ, EL FOCO Y LA EXCENTRICIDAD

Recordamos que la excentricidad en una hipérbola debe ser mayor que 1, en este ejemplo usaremos 2:

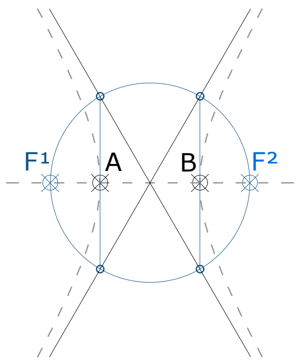
1) Dibujamos el eje en perpendicular a la directriz y pasando por F1
2) Desde el punto de corte de la directriz y el eje, colocamos hacia un lado, una unidad y a continuación la medida de la excentricidad. Hacia el otro lado, colocamos la unidad y sobre esta, la excentricidad (pasándose al otro lado)
3) Unimos los extremos de ε con F1 y trazamos paralelas desde los extremos de la unidad, estos cortes determinarán los vértices de la hipérbola.



CONSTRUCCIONES A PARTIR DE LAS ASINTOTAS

CA1 CONSTRUCCIÓN DADAS LAS ASÍNTOTAS Y LOS VÉRTICES. Método 1

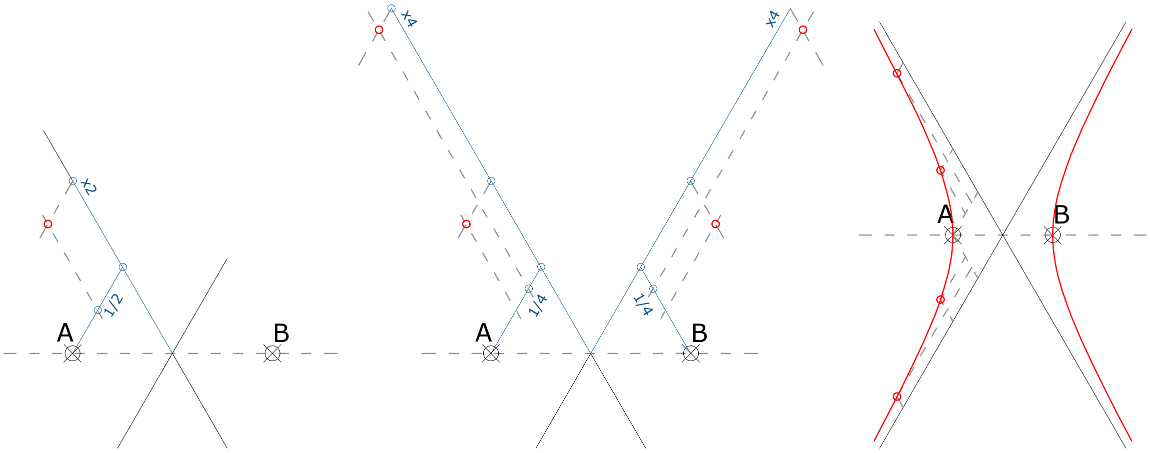
Teniendo los vértices y el centro de la curva trazamos la recta del eje real. Desde los vértices y en perpendicular al eje, buscamos el punto de corte con las asíntotas, eso nos dará la medida del centro a los focos.
Una vez situados los elementos principales, podemos construir la curva con el método habitual.



CA2 CONSTRUCCIÓN DADAS LAS ASÍNTOTAS Y LOS VÉRTICES. Método 2

Este método no busca los focos sino que dibuja la curva a partir de proporciones. Es poco práctico.

Desde los vértices trazamos paralelas a las asíntotas hasta cortarlas.
La distancia del centro al corte 1, se duplica y a su vez el segmento del vértice al corte se divide para dos.
En el corte de estas nuevas paralelas encontramos un punto del trazado. Si lo triplicamos y los dividimos para tres, encontraremos otro punto, igual que si lo cuadruplicamos y lo dividimos para cuatro...



CA3 CONSTRUCCIÓN DADO UN FOCO, LA CIRCUNFERENCIA FOCAL Y UNA ASÍNTOTA

Al dibujar la circunferencia focal con centro en el foco dado, pasamos una paralela a la asíntota dada por F1 y encontramos un par de puntos de corte. Podemos hacer el ejercicio utilizando cualquiera de esos puntos.

1) Trazamos el simétrico del punto de corte seleccionado, ese será nuestro segundo foco F2.
   Por tanto podemos conocer la dirección del eje real.
2) El radio de la circunf. focal es AB, así que colocado desde el punto medio entre focos obtenemos los vértices.
   Con estos datos ya podemos dibujar la hipérbola por el método habitual.