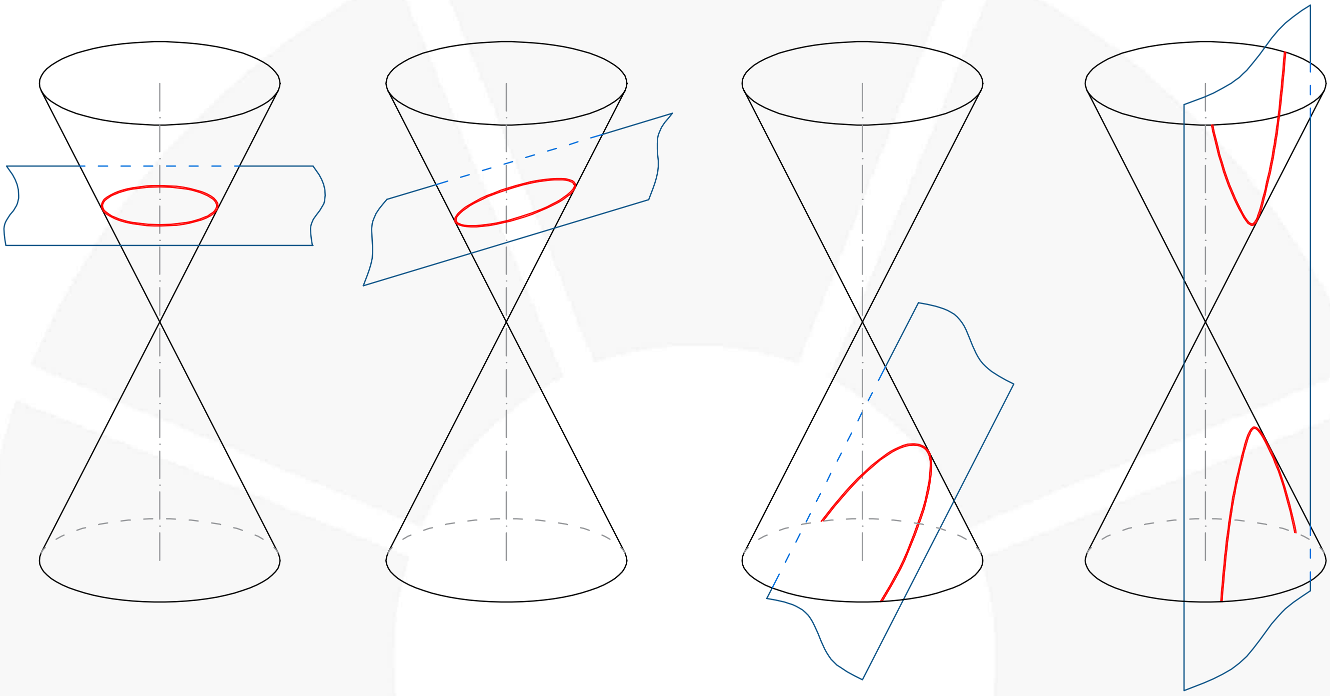
CURVAS CÓNICAS: Elipses

Una curva cónica es un trazado plano, resultado de cortar un cono infinito con un plano.
Si cortamos un cono recto con un plano paralelo a la base, la curva resultante es una circunferencia.
Pero si el plano está inclinado vamos a encontrar 3 tipos de curvas diferentes:

- **Elipse**: curva cerrada resultado de cortar al cono con un plano oblicuo respecto al eje
- **Parábola**: curva abierta, resultado de cortar al cono con un plano paralelo a cualquier generatriz
- **Hipérbola**: curva abierta y doble, resultado de cortar al cono con un plano paralelo al eje



ELEMENTOS DE UNA CURVA

Toda curva cónica tiene cuatro de elementos definitorios:

- EJE REAL
- FOCO O FOCOS
- DIRECTRIZ
- EXCENTRICIDAD

EJE REAL

Es el eje principal y de simetría axial de la curva, siempre perpendicular a la directriz o directrices y sobre el que se encuentra el foco o focos de la misma.

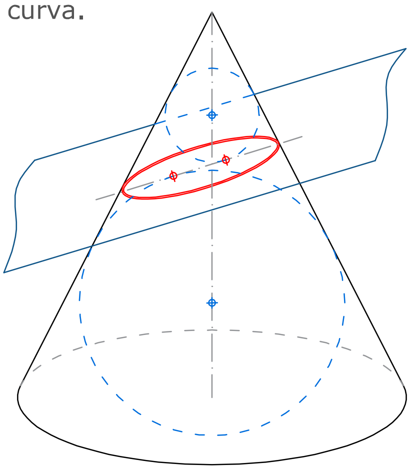
En la elipse es el eje mayor, acotado por dos vértices.
En la parábola es el único eje sobre el que se encuentra el vértice inicial.
En la hipérbola el eje principal contiene también a los dos vértices que definen la distancia de separación entre las dos ramas de la curva.

FOCOS

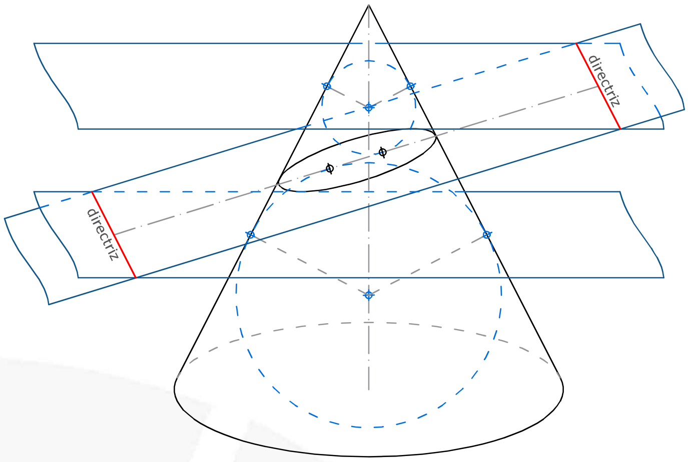
¿Qué es foco de una curva cónica?

TEOREMA DE DANDELIN

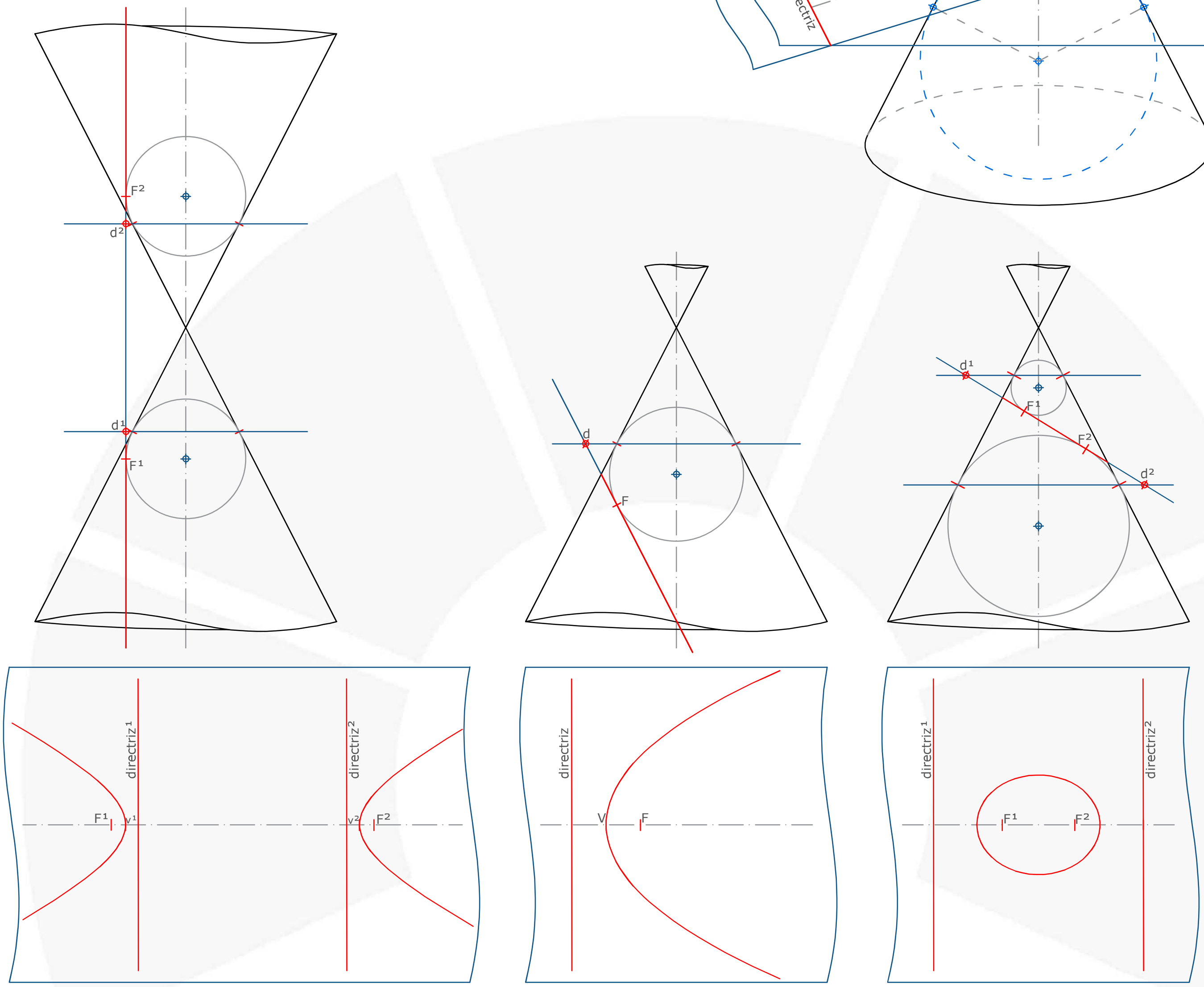
El foco o focos de una curva cónica son los puntos de tangencia del plano secante con las esferas inscritas en la superficie cónica que sean a su vez tangentes a este plano sección.



DIRECTRICES



Una directriz es la recta de intersección del plano secante (el que se inscribe la curva) con el plano que recoge a los puntos de tangencia de la esfera inscrita con el cono.



EXCENTRICIDAD

La excentricidad de una curva cónica es un valor constante resultado de la razón entre las distancias de un punto cualquier de la curva al foco y del mismo punto a su directriz correspondiente.

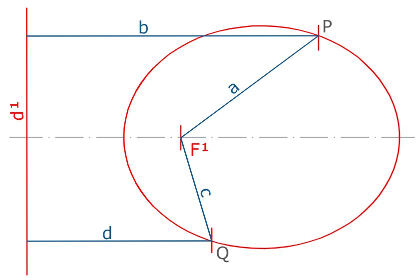
Excentricidad = PF^1/PD^1

En las **elipses** la excentricidad es menor que 1 $\varepsilon<1$

En las **parábolas** la excentricidad es igual que 1 $\varepsilon=1$

En las **hipérbolas** la excentricidad es mayor que 1 $\varepsilon>1$

De manera que conocida la excentricidad de una curva sabremos de qué tipo de cónica se trata.



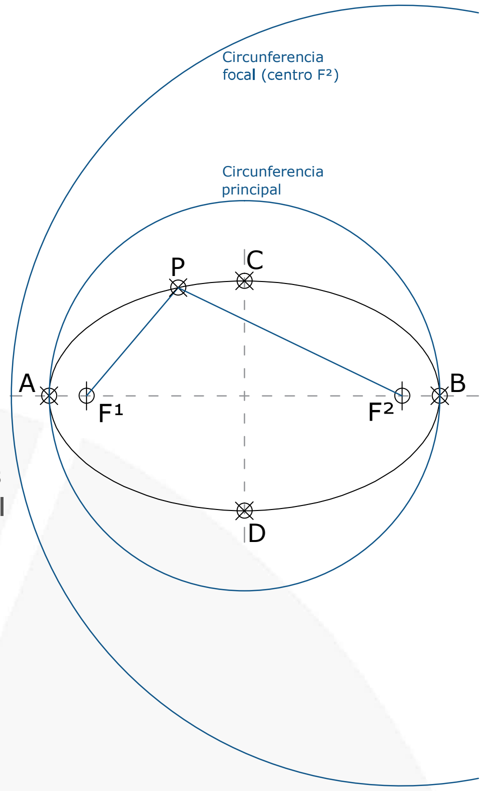
$\varepsilon<1$

$\varepsilon= PF^1/PD^1$

$\varepsilon=a/b=c/d$

ELIPSE: DEFINICIÓN Y CONSTRUCCIONES

Una elpise es una curva cónica cerrada y plana, producida por la sección de un cono recto con un plano oblicuo al eje. Es el LUGAR GEOMÉTRICO de los puntos del plano cuya distancia a los focos es constante.



- AB eje mayor o real
- CD eje menor o imaginario

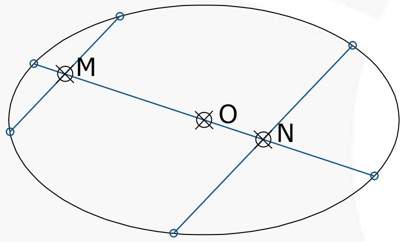
Perpendiculares entre sí
Cortan en el centro de la elipse
Ejes de simetría

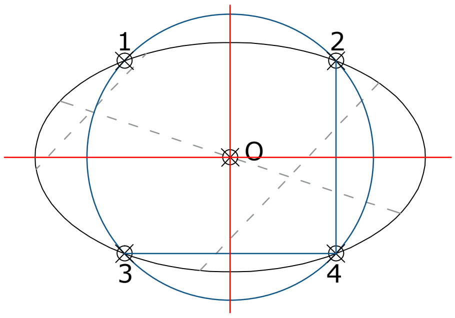
- DISTANCIA FOCAL: Distancia entre focos
- Circunferencia principal: diámetro AB
- Circunferencia focal: radio AB y centro uno de los focos
- RADIOS VECTORES: Distancia desde cualquier punto de la curva a los focos
  Esta dimensión es constante e igual al eje mayor o real

$F^1xP + F^2xP = AB = \text{constante}$

Ejes DADA UNA ELIPSE DETERMINAR SUS EJES MAYOR Y MENOR

Para encontrar los ejes principales de una elipse:
1) Dibujamos dos cuerdas cualquiera paralelas
2) Encontramos sus puntos medios y trazamos una nueva cuerda que los una.
   El centro de esta tercera cuerda es el centro de la elipse.
3) Desde el centro trazamos una circunferencia de cualquier radio y marcamos los cuatro puntos de corte con la elipse
4) Al unir estos puntos obtenemos la dirección de los ejes principales.





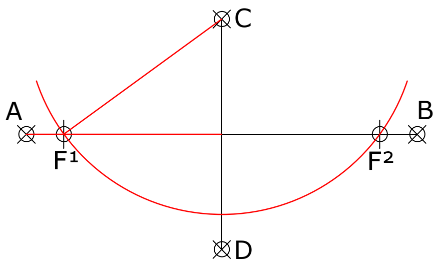
CONSTRUCCIÓN DE ELIPSES

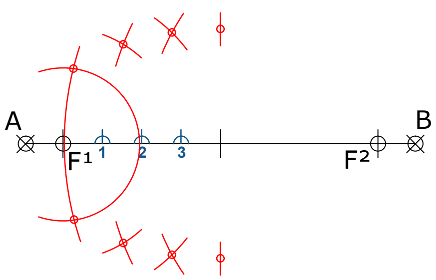
C1 MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN POR PUNTOS

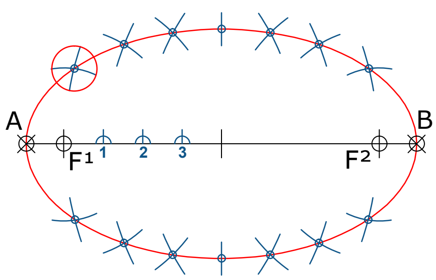
Dado el eje real AB y la posición de los focos F1 y F2 o bien dados los dos ejes:

Si nos dan los dos ejes: Tomando la medida del semieje mayor AO y realizando un arco de compás desde un extremo del eje menor, encontramos la posición de los focos F1 y F2.

1) Marcamos puntos sobre el eje mayor distribuidos entre un foco y el centro: 1, 2, 3...
2) Tomamos la distancia A1 y hacemos arco de compás sobre F1 | distancia B1 y pinchamos sobre F2
   De esta forma encontraremos dos puntos de corte que pertenecen al trazado de la curva.
3) Con el mismo sistema repetimos con el resto de puntos.
   La unión de todos será la elipse.



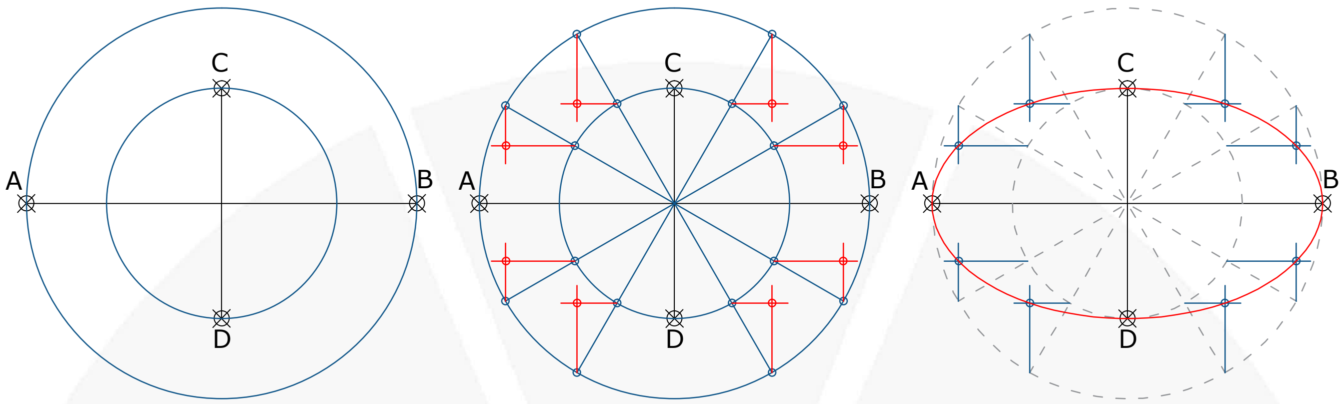




C2 MÉTODO POR AFINIDAD

Dados los dos ejes, se traza la circunferencia principal AB y la circunferencia de diámetro CD
1) Se trazan radios aleatorios y distribuidos que corten con ambas circunferencias.
2) Sobre el punto de corte de cada radio con la circunferencia mayor se traza una línea paralela al eje menor y hacia el interior de la circunferencia.
Y sobre el punto de corte con la circunferencia menor se traza la línea paralela al eje mayor y hacia el exterior de la circunferencia.

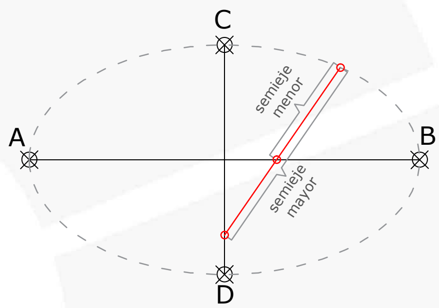
Los puntos de corte de las mini-rectas forman parte del trazado de la curva



C3 MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN MEDIANTE SEMIEJES

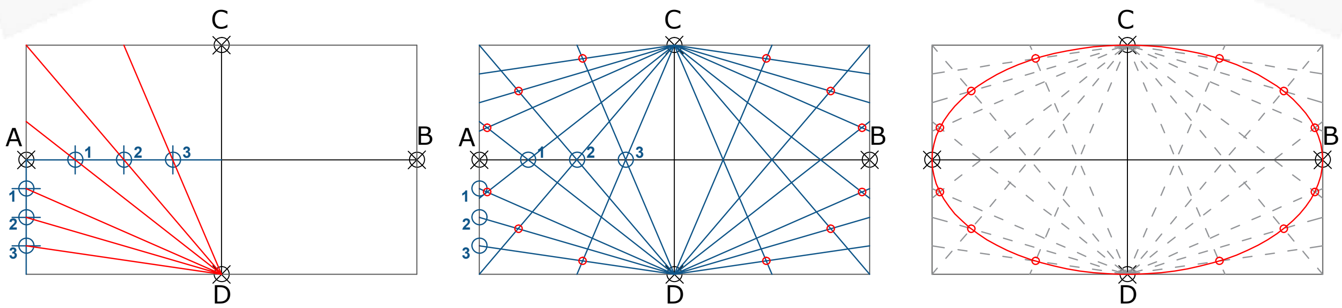
También llamado método del jardinero, es una forma de construcción aproximada y poco precisa.

Dados los dos ejes, tomamos sobre una misma barra rígida y con mismo origen las medidas del semieje mayor AO y del semieje mejor CO.
Al colocar el extremo de esta barra en cualquier punto del eje menor y hacer coincidir el corte intermedio con el eje mayor; el origen de la barra determina un punto del trazado elíptico.



C4 MÉTODO DE INTERSECCIONES DE RECTAS

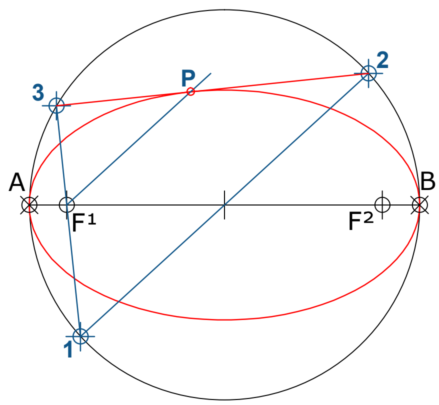
Dados los dos ejes, se traza un rectángulo por los extremos A,B,C,D de los mismos.
1) Se dividen los lados cortos del rectángulo y el eje mayor en el mismo número de partes iguales.
2) Se trazan rectas desde los vértices del C, D del eje menor pasando por todos los puntos señalados.
3) La prolongación de la recta que pasa desde C por el punto 1 del eje, se cortará con la que pasa desde D por el punto 1 del lado menor del rectángulo correspondiente. El resultado es un punto del trazado de la elipse.



C5 MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA PRINCIPAL

Es un método preciso pero demasiado laborioso para dibujar la elipse.

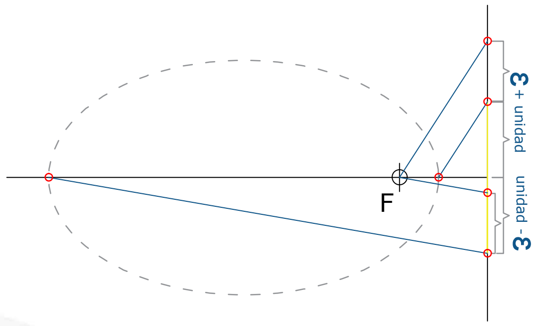
Dado el eje mayor y los focos se traza la circunferencia principal.
1) Se traza un diámetro cualquiera oblicuo y desde uno de sus extremos (1) se dibuja una recta secante que pase por un foco.
2) Se unen los puntos 2 y 3, siendo la recta resultante tangente a la curva.
3) Al pasar una paralela al diámetro inicial por el foco se determina el punto P que forma parte del trazado de la curva.



C6 CONSTRUCCIÓN DADOS LA DIRECTRIZ, EL FOCO Y LA EXCENTRICIDAD

Recordamos que la excentricidad debe ser menor que 1 ,
en este ejemplo usaremos 0,8:

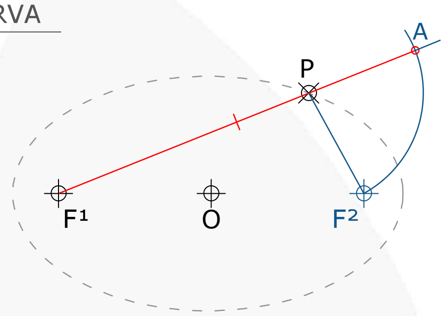
1) Dibujamos en perpendicular a la directriz y pasando por F la ubicación del eje.
2) Desde el punto de corte de la directriz y el eje, colocamos hacia un lado, una unidad y a continuación la medida de la excentricidad. Hacia el otro lado, colocamos la unidad y sobre esta, la excentricidad.
3) Unimos el extremo de ε con F2 y trazamos paralela desde el extremo de la unidad. Estas paralelas determinarán los vértices de la elipse.



C7 CONSTRUCCIÓN DADOS EL CENTRO, EL FOCO Y UN PUNTO DE LA CURVA

Dibujamos el otro foco simétrico al dado respecto al centro.
1) Unimos uno de los focos (F1) con el punto dado P.
2) Llevamos sobre la extensión de la recta la medida de P al otro foco (F2).
3) Desde F1 hasta el punto A tenemos la dimensión del eje mayor.

Una vez colocado el eje mayor y sobre la recta OF, podemos trazar la curva con cualquier método de los anteriores.

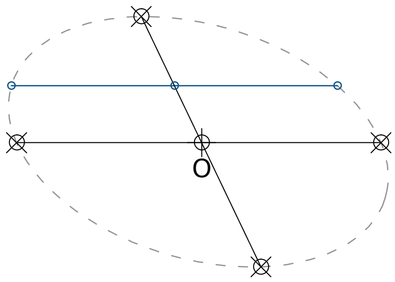


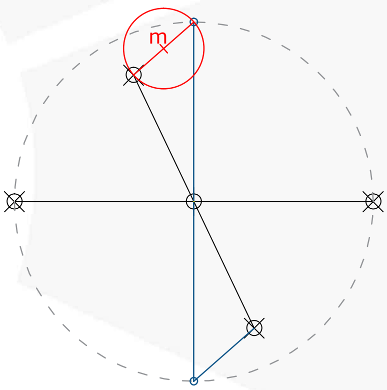
DIÁMETROS CONJUGADOS

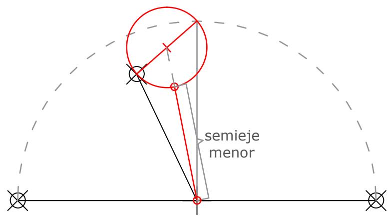
Se llama diámetro de una elipse a cualquier cuerda que pase por su centro. Dos diámetros son conjugados cuando cualquier cuerda paralela a uno de ellos, divide en dos partes iguales por el otro.

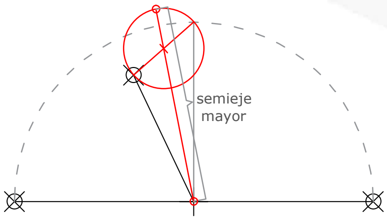
Los ejes principales son los únicos perpendiculares entre sí.
Para encontrar los ejes principales a partir de un par de conjugados necesitamos:

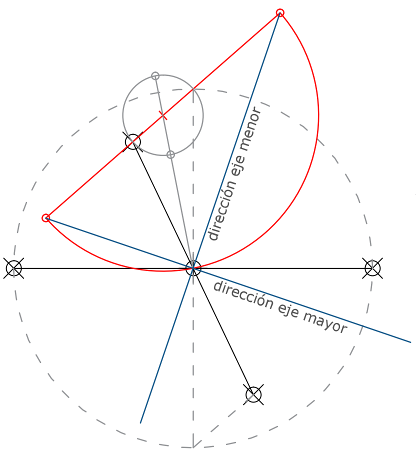
1) Trazar una circunferencia usando como diámetro el eje más largo de los dados.
2) Dibujar el diámetro perpendicular a este y unir sus extremos con el otro conjugado. (de forma que queda un lazo dibujado)
3) Sobre uno de los segmentos de unión, encontramos el punto M y dibujamos una circunferencia.
4) En la recta MO se tenemos dos segmentos, El que va de O al primer corte con la circunferencia es el semieje menor El que va de O hasta el segundo corte con la circunferencia es el semieje mayor
5) A continuación, se traza una semicircunferencia de centro M y radio MO limitada por la extensión de la recta de unión inicial.
6) Al unir los extremos de la semicircunferencia con el centro de la elipse se dibujan las direcciones (perpendiculares entre sí) sobre las que se sitúan los ejes principales.

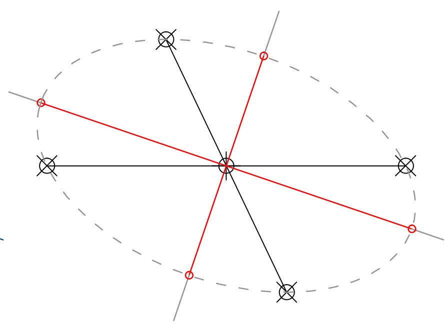








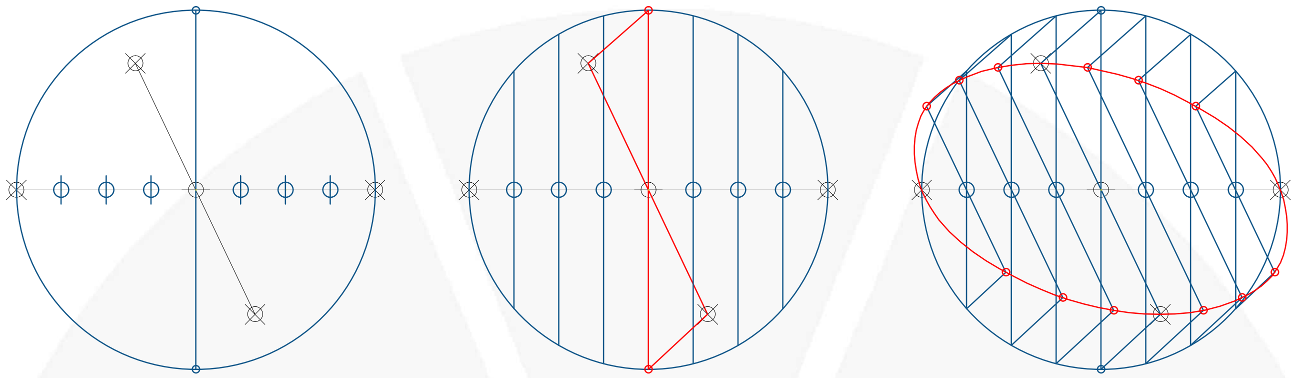




C8 CONSTRUCCIÓN DADOS DOS DIÁMETROS CONJUNGADOS

Dados los dos conjugados, trazamos una circunferencia usando como diámetro el mayor de los dos.

1) Dibujamos el diámetro perpendicular a este y unimos sus extremos con los extremos del conjugado. (hasta aquí es igual que para encontrar los ejes principales)
2) Dividimos el eje de referencia y por cada división pasamos dos rectas: una perpendicular al eje hasta cortar con la circunferencia y otra paralela al segundo eje conjugado.
3) En los puntos dónde las perpendiculares chocan con la circunferencia, se dibujan rectas paralelas a la unión primera. De forma que las prolongamos hasta su correspondiente, como si trazásemos "lazos" paralelos. Los puntos de corte de estos "lazos" son parte del trazado de la curva.



C9 CONSTRUCCIÓN DADOS DOS DIÁMETROS CONJUNGADOS IGUALES

Dados dos ejes conjugados, creamos un paralelogramo (rombo) trazando paralelas por los extremos.

1) Sobre una de ellas, hacemos una semicircunferencia. Desde el punto medio de esta y con origen en los extremos proyectamos la medida sobre la base.
2) A partir de estas divisiones hacemos paralelas a los ejes encontrando los puntos que limitan los ejes principales de la elipse. Con los 8 puntos resultantes podemos trazar la curva.