GEOMETRÍA — TANGENCIAS Y ENLACES parte II

Cuando las tangencias son de radio desconocido vamos a resolverlas mediante los casos de APOLONIO
Trabajaremos mediante una serie de pasos que nos ayudará a tener claro cuales son los procesos resolutivos.

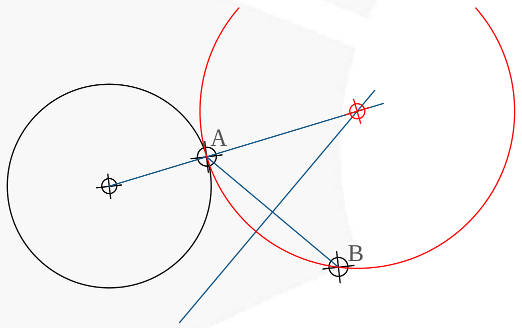
Los 10 CASOS DE APOLONIO son:

1)	PPP.	PUNTO + PUNTO + PUNTO	- solución directa | potencias | potencias+inversión	
2)	PPR.	PUNTO + PUNTO + RECTA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	
3)	PRR.	PUNTO + RECTA + RECTA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	
4)	RRR.	RECTA + RECTA + RECTA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	
5)	RRC.	RECTA + RECTA + CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_2º
6)	RCC.	RECTA + CIRCUNF.+ CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_4º
7)	CCC.	CIRCUNF. + CIRCUNF.+ CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_6º
8)	PPC.	PUNTO + CIRCUNF. + CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_1º
9)	PCC.	PUNTO + PUNTO + CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_5º
10)	PRC.	PUNTO + RECTA + CIRCUNFERENCIA	- solución directa | potencias | potencias+inversión	_3º

CPP CIRCUNFERENCIA QUE SEA TANGENTE A DOS PUNTOS Y UNA CIRCUNFERENCIA

Dos posibilidades de ejercicio:

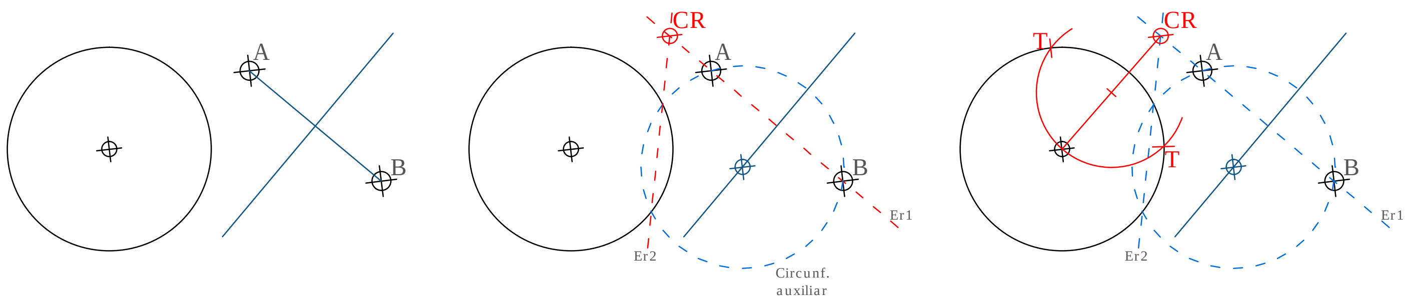
1) Uno de los puntos está sobre la circunferencia



SOLUCIÓN DIRECTA

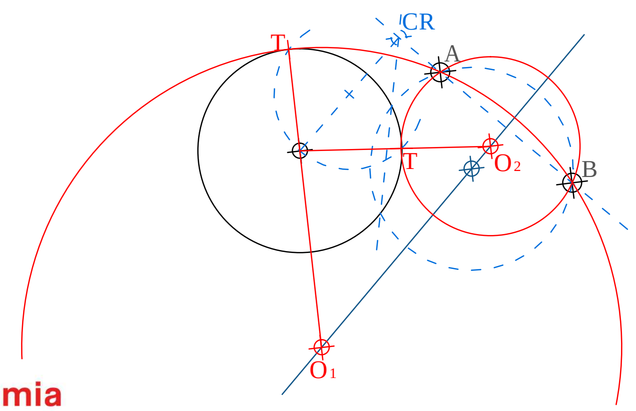
Sabemos que el punto sobre la circunferencia será el punto de tangencia Y con A y B buscamos el haz de centros.
Unimos el centro de la circunferencia con el punto de tangencia y lo extendemos hasta el haz.

2) Los puntos no pertenecen a la circunferencia incial



SOLUCIÓN POR POTENCIAS

Dibujamos el haz de centros de AB y sobre este trazamos una circunferencia auxiliar que corte a la inicial.
A continuación sacamos los ejes radicales y el CR
Desde el centro radical localizamos los puntos de tangencia sobre la circunferencia.
Unimos centro con puntos de tangencia hasta cortar al haz de AB y allí tendremos los centros de las dos circunferencias SOLUCIÓN

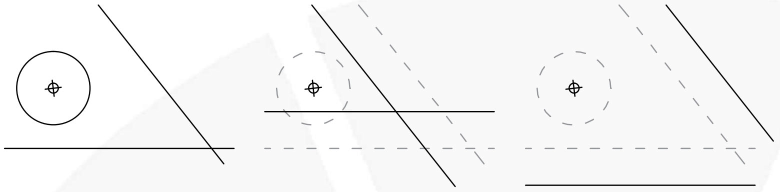


CRR CIRCUNFERENCIA QUE SEA TANGENTE A DOS RECTAS Y UNA CIRCUNFERENCIA

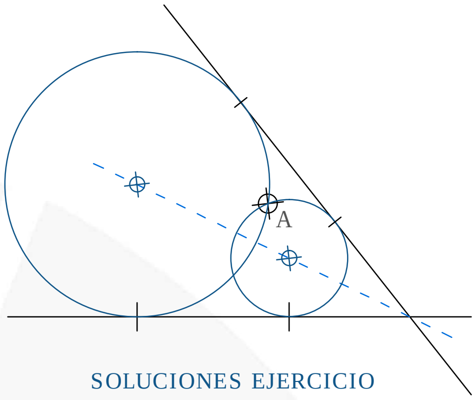
CONVERSIÓN EN PRR

Restamos radio hasta convertir a la circunferencia en un punto (circunf. de radio cero)

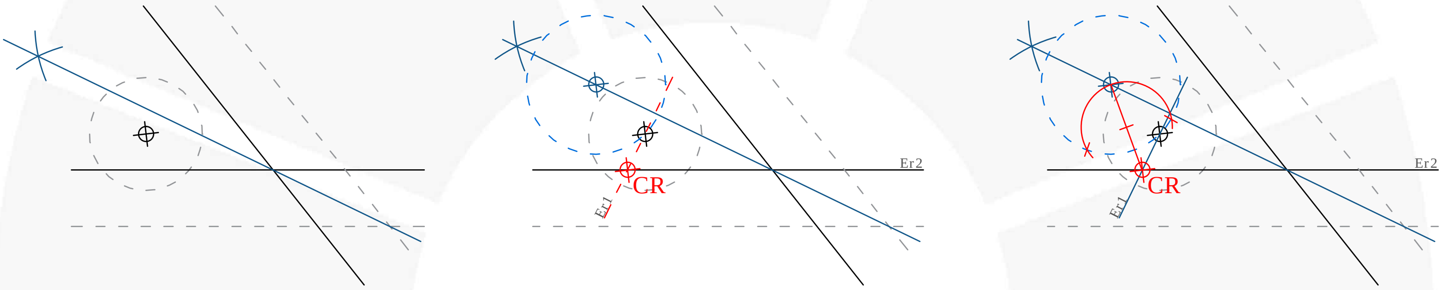
El ejercicio de PRR da dos soluciones posibles.
Al restar el radio y convertir a la circunferencia en punto, debemos restar la misma medida a las rectas, de forma que tenemos dos juegos de rectas diferentes y por tanto hasta 4 soluciones posibles.



Ejercicio original — Resta del radio hacia el interior — Resta del radio hacia el exterior

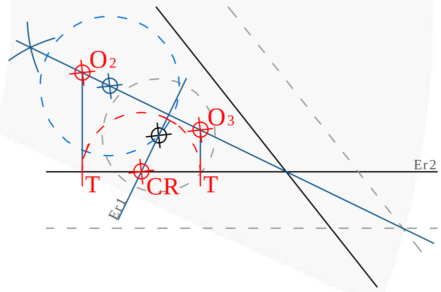


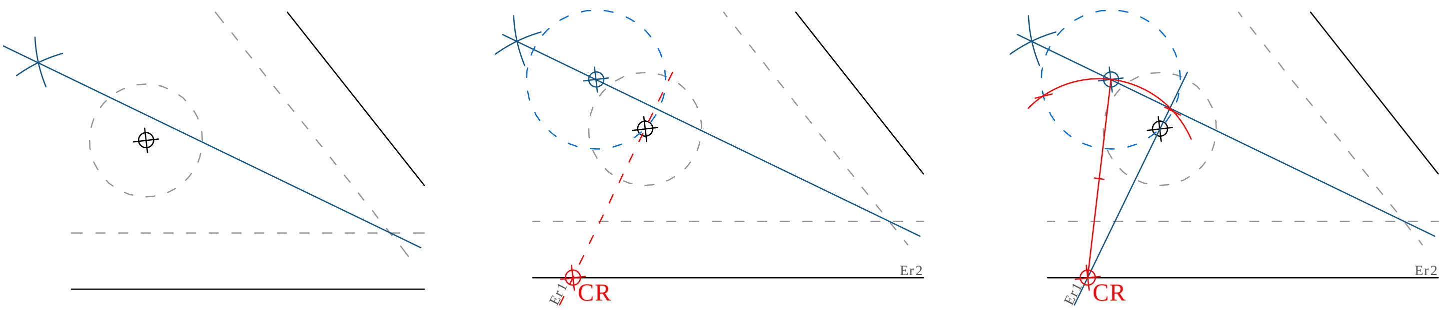
SOLUCIONES EJERCICIO PUNTO - RECTA - RECTA



Resta de radio por el INTERIOR

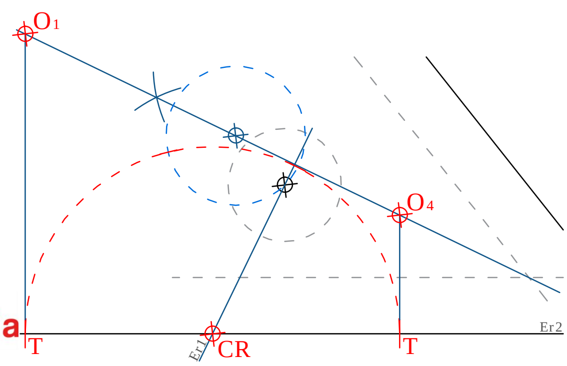
Tenemos como punto de partida, punto y dos rectas.
Trazamos bisectriz (haz de centros) | circunferencia auxiliar y tomamos como eje radical 2 una de las rectas.
El eje radical 1 se traza desde el punto y en perpendicular al haz.
Localizamos CR y desde allí tangencias a la circunferencia auxiliar.
Extendemos el arco de igual potencia hasta la recta y esos serán los puntos de tangencia sobre esta.
En perpendicular desde T a la bisectriz encontramos los centros O2 y O3

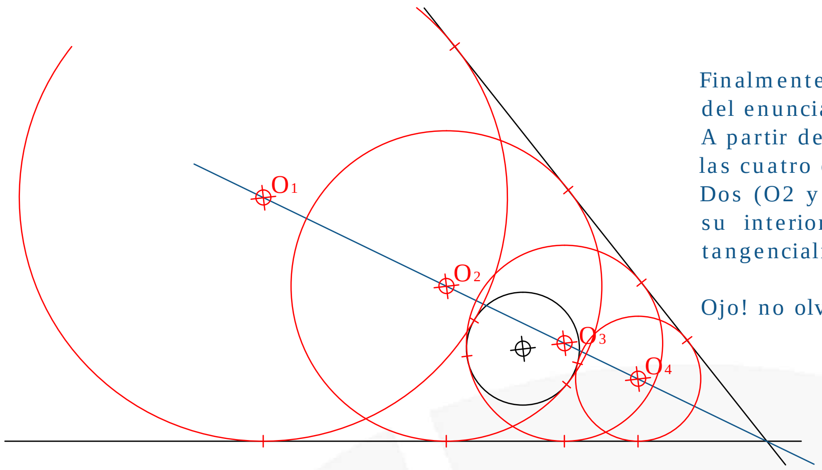




Resta de radio por el EXTERIOR

Se repite el proceso anterior, pero teniendo como rectas las paralelas exteriores a las originales.
Una vez terminado tentremos los centros sobre la bisectriz O1 y O4





Finalmente, volvemos a remarcar los datos iniciales del enunciado. Las dos rectas y la circunfenrecia.
A partir de los centros O1, O2, O3 y O4 delimitamos las cuatro circunferencias tangentes.
Dos (O2 y O3) recogen a la circunferencia inicial en su interior y las otras dos (O1 y O4) la tocan tangencialmente por el exterior.

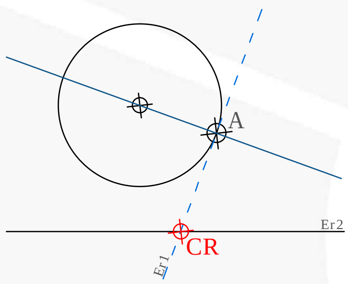
Ojo! no olvides marcar los 12 puntos de tangencia.

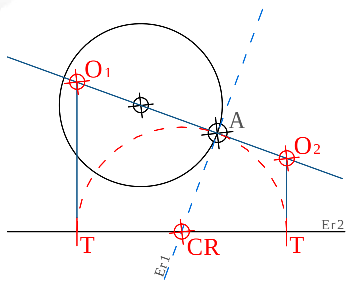
PRC CIRCUNFERENCIA QUE SEA TANGENTE A UN PUNTO, UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

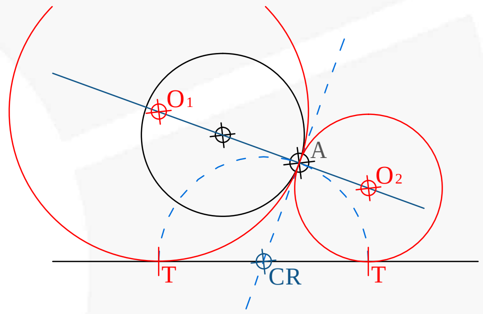
Tres posibilidades de ejercicio:

1) El punto está sobre la circunferencia

SOLUCIÓN POR POTENCIAS. Dado que A es el punto de tangencia en la circunferencia, trazamos el eje radical en perpendicular al segmento OA (haz de centros)
Localizamos el CR en la recta. Al pasar un arco por A tenemos la circunferencia de igual potencia K y los puntos T sobre la recta. En el haz de centros OA y en perpendicular desde las dos T, encontramos los centros de las circunferencias solución.

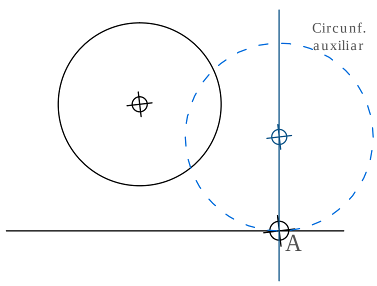


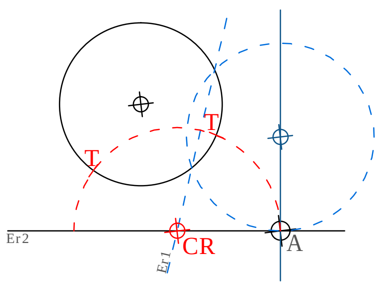


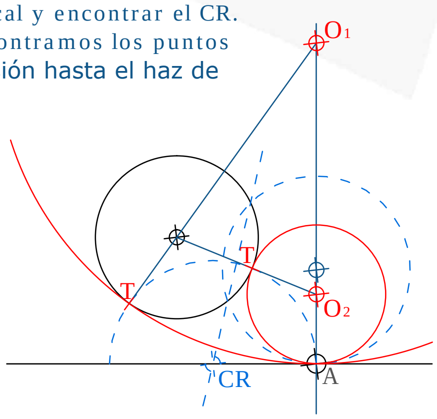


2) El punto está sobre la recta

SOLUCIÓN POR POTENCIAS. Dado que A es el punto de tangencia en la recta, trazamos el eje radical en perpendicular a esta (haz de centros)
Trazamos una circunferencia auxiliar que permita dibujar un eje radical y encontrar el CR.
Con centro en CR y radio hasta A, trazamos la circunferencia K y encontramos los puntos de tangencia en la circunferencia. En su unión con el centro y extensión hasta el haz de centros, encontramos los centros de las circunferencias solución.



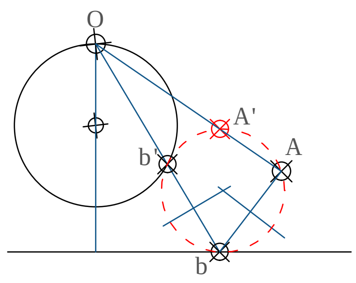




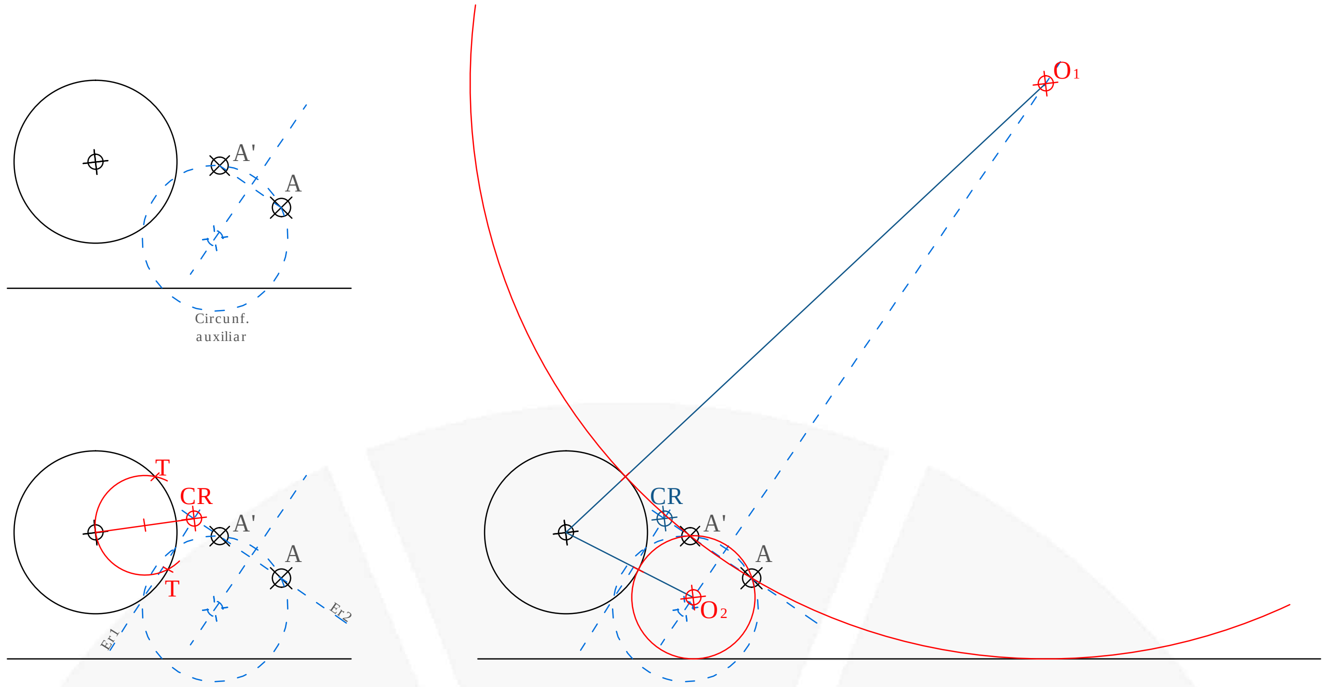
3) El punto es exterior

Para empezar, vamos a buscar un segundo punto. ¿Cómo? utilizando la circunferencia y la recta como sistema de INVERSIÓN:

Suponiendo una inversión positiva, el centro O estará en la perpendicular a la recta que pasa por el centro de la circunferencia y situado sobre esta en el corte superior.
A partir del centro O y con un juego de puntos cualquiera inversos (b, b') buscamos A' sabiendo que 4 puntos forman parte de una circunferencia.
** Revisar apuntes de inversión*



DOVELA academia

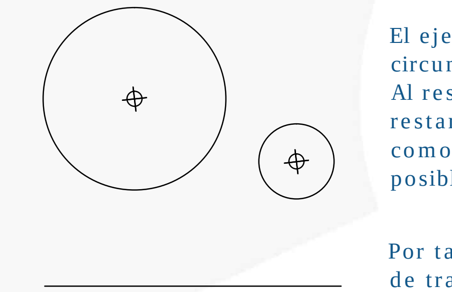


A partir de los dos puntos, la circunferencia y la recta buscamos la solución mediante POTENCIAS
1) Circunf.auxiliar | 2) Ejes radicales y Centro radical | 3) Puntos tangentes desde el CR a la circunferencia inicial.
Y por último, unión de los puntos de tangencia con el centro hasta el haz de centros que es la mediatriz del par de puntos inversos A y A', dando como resultado los centros O1 y O2 de las circunferencias solución

PRC CIRCUNFERENCIA QUE SEA TANGENTE A UNA RECTA Y DOS CIRCUNFERENCIAS

CONVERSIÓN EN PRC

Restamos radio hasta convertir a la circunferencia en un punto (circunf. de radio cero)

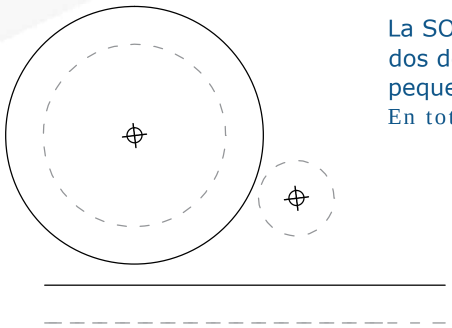


Ejercicio original

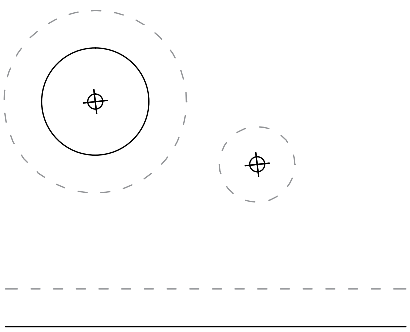
El ejercicio de PRC situando en punto de forma externa a la circunferencia y a la recta da dos soluciones.
Al restar el radio y convertir a la circunferencia en punto, debemos restar la misma medida hacia dentro y hacia fuera tanto a la recta como a la circunferencia. De forma que resultan 4 soluciones posibles.

Por tanto, definidos punto - recta - circunferencia de trabajo, necesitamos el inverso del punto y REPETIR EL EJERCICIO ANTERIOR.

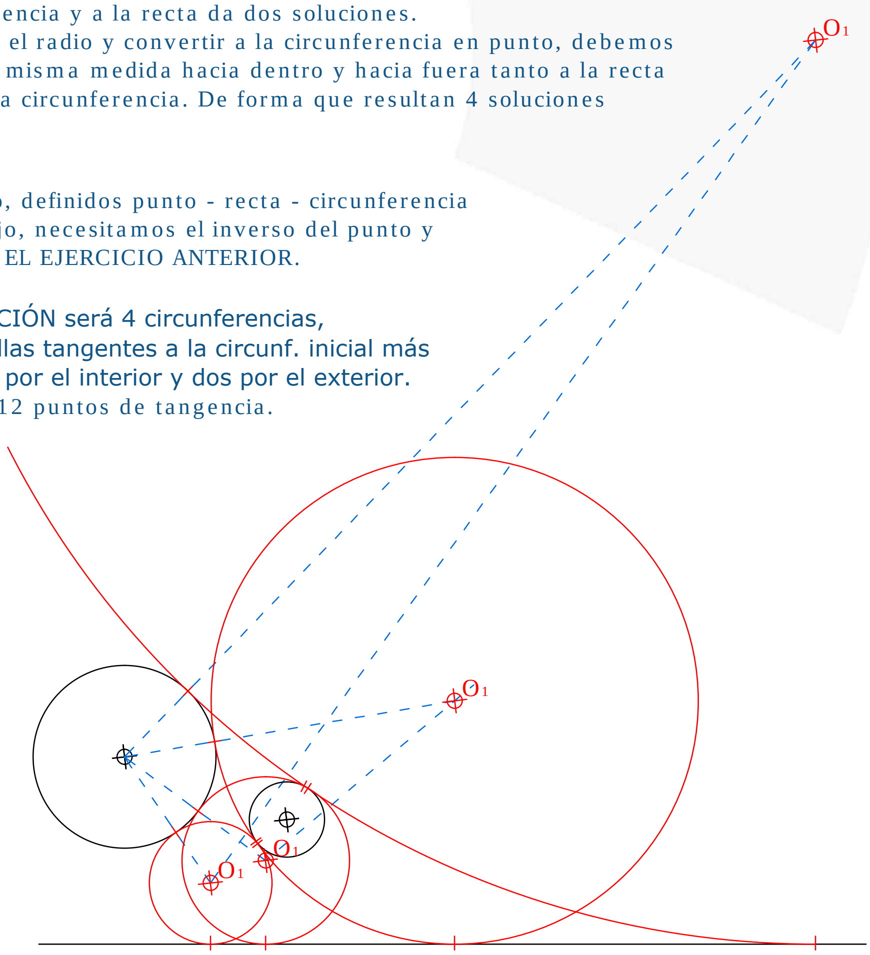
La SOLUCIÓN será 4 circunferencias, dos de ellas tangentes a la circunf. inicial más pequeña por el interior y dos por el exterior.
En total 12 puntos de tangencia.



Resta del radio "acercandose" al punto



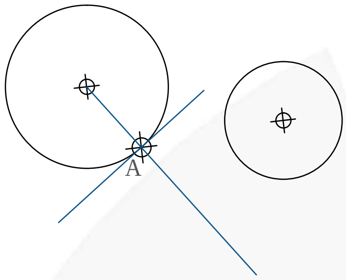
Resta del radio "alejandose" del punto

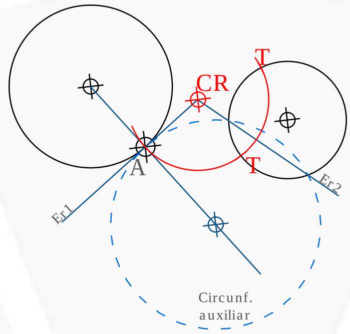


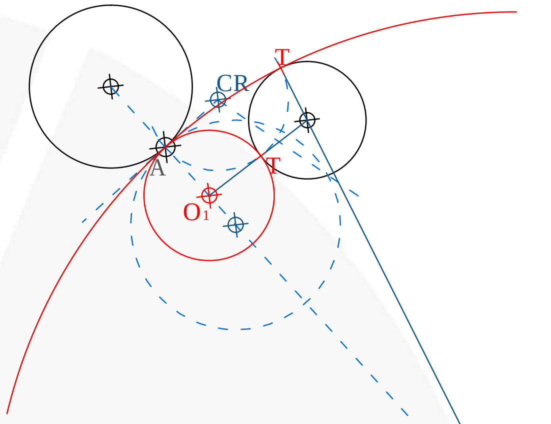
Dos posibilidades de ejercicio:

1) El punto está sobre una circunferencia

SOLUCIÓN POR POTENCIAS. Dado que A es directamente un punto de tangencia , trazamos el haz de centros OA y circunferencia auxiliar que permita dibujar un segundo eje radical y encontrar el CR.
Con centro en CR y radio hasta A, trazamos la circunferencia K y encontramos los puntos de tangencia en la otra circunferencia. En su unión con el centro y extensión hasta el haz de centros, encontramos los centros de las circunferencias solución.

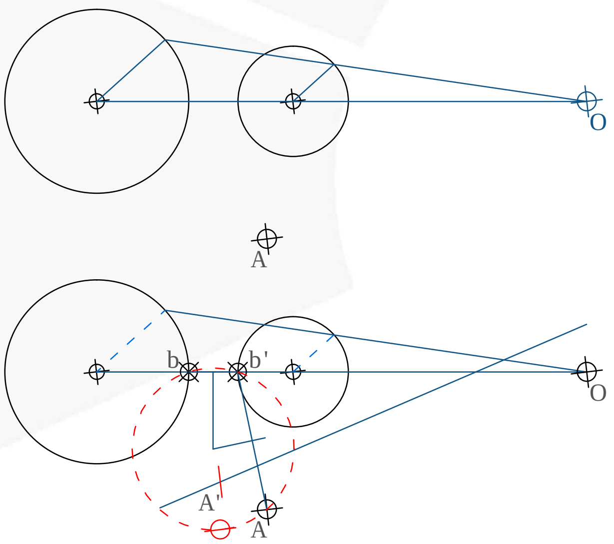






2) El punto es exterior a las circunferencias

SOLUCIÓN POR INVERSIÓN + POTENCIAS

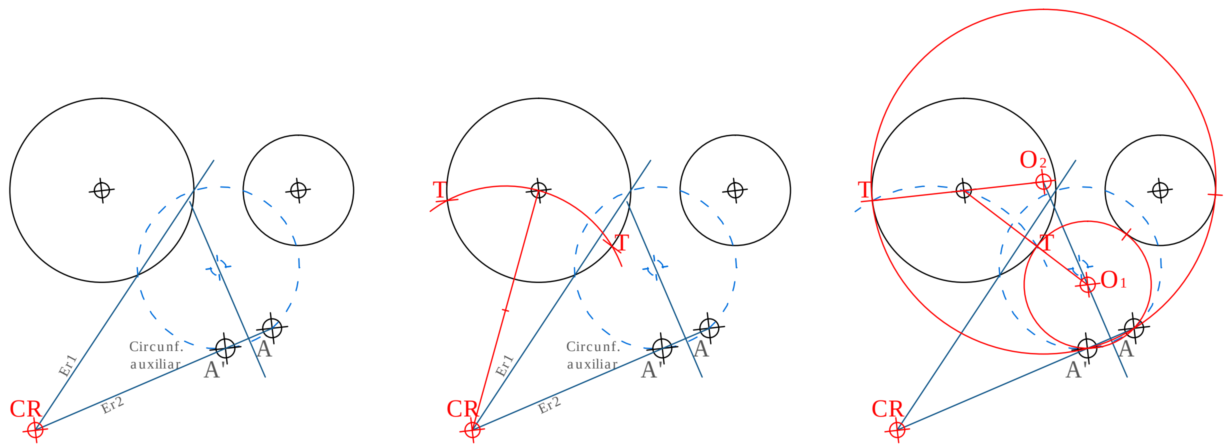


Dadas dos circunferencias y el punto A, buscamos el inverso de A'. Localizamos el centro de inversión teniendo en cuenta en este caso es coincidente con el centro de homotecia.

Una vez localizado O, buscamos un par de puntos inversos (b, b') que nos ayuden a encontrar A'
A partir de aquí, realizamos el ejercicio mediante POTENCIAS.

1) trazamos mediatriz del segmento AA' = haz de centros
2) circunferencia auxiliar que nos corte a una de las iniciales (con la que vamos a trabajar)
3) Ejes radicales y centro radical.
4) Puntos de tangencia desde el CR a la circunf. inicial
5) conocidos los puntos de tangencia, los centros y el haz de centros: encontramos los dos centros solución O1 y O2

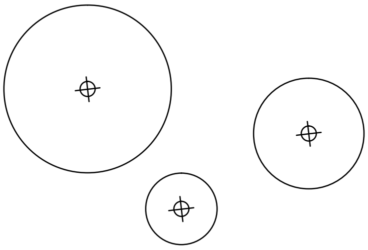
O2



CCC CIRCUNFERENCIA QUE SEA TANGENTE A TRES CIRCUNFERENCIAS

CONVERSIÓN EN PCC

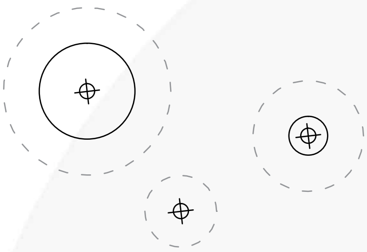
Restamos radio hasta convertir la circunferencia menor en un punto (circunf. de radio cero)



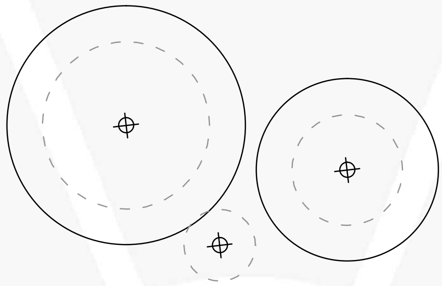
El ejercicio de PCC <u>cuando el punto es exterior a ambas circunferencias</u> tiene dos resultados posibles.
Al restar el radio hacia el interior y hacia el exterior de las otras dos circunferencias, salen dos conjuntos de PCC, por lo que el resultado final serán 4 circunf. SOLUCIÓN

A partir de los nuevos parámetros de trabajo, REPETIMOS EL EJERCICIO ANTERIOR dos veces. Una vez encontrados los 4 centros, se buscan los puntos de tangencia con las circunferencias originales.

Resta de radios hacia el interior

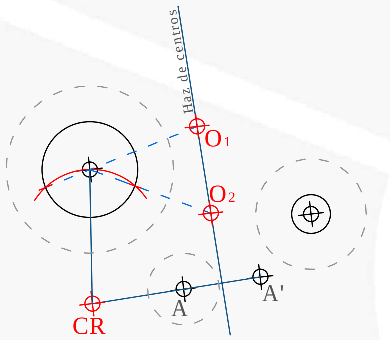


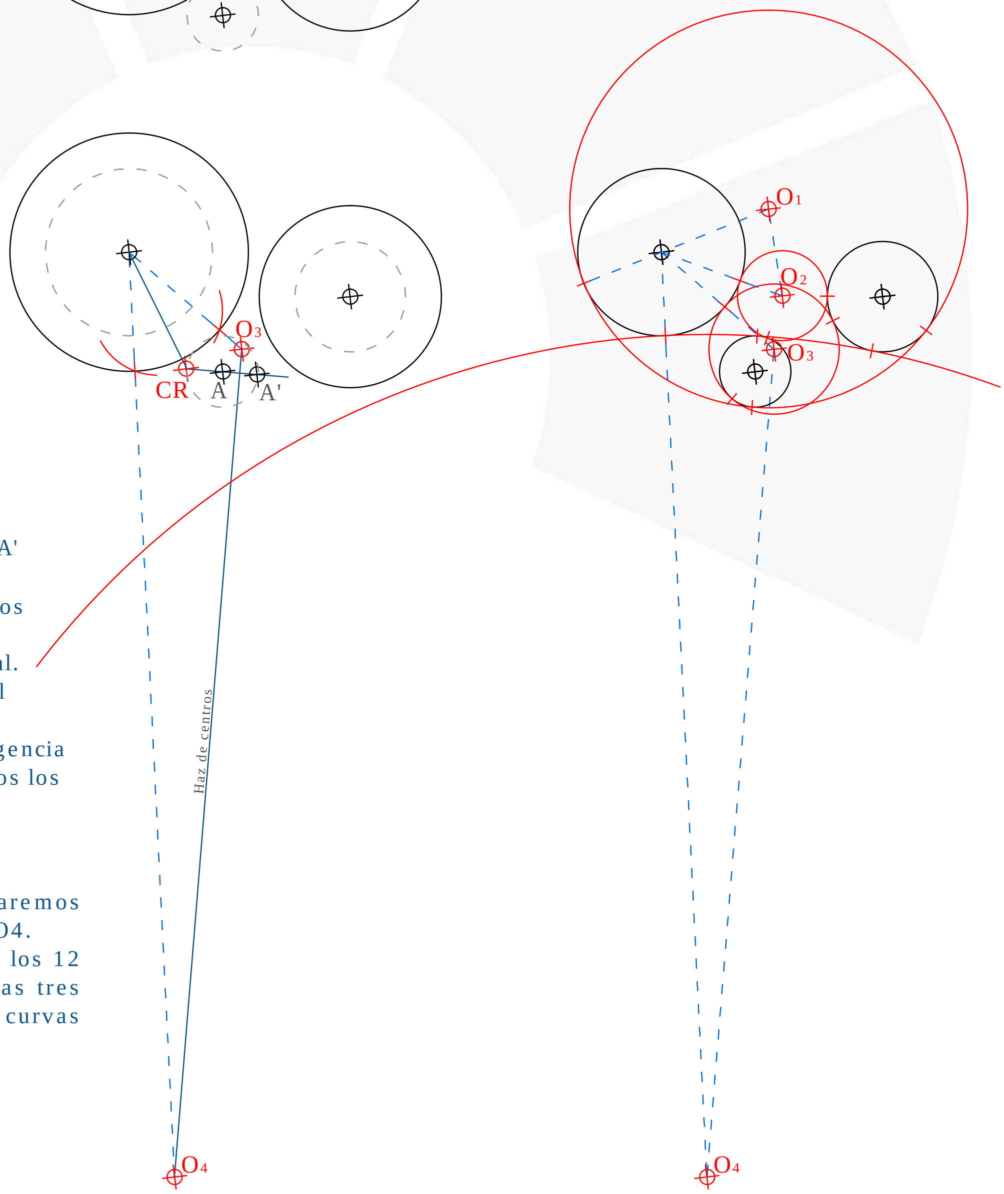
Resta de radios hacia el exterior



PRIMERA PARTE: INVERSIÓN

1) Buscamos en centro de inversión O
2) A partir de un par de puntos (b,b') encontramos el inverso de A - A'
(sea A la circunferencia de radio cero)





SEGUNDA PARTE: POTENCIAS

3) La mediatriz del segmento AA' será el haz de centros
4) Circunferencia auxiliar que nos corte a una de las iniciales.
5) Ejes radicales y centro radical.
6) Puntos de tangencia desde el CR a la circunf. inicial
7) Conocidos los puntos de tangencia y el haz de centros: buscamos los centros solución.

RESULTADO FINAL

En el primer sistema encontraremos O1 y O2, y en el segundo O3 y O4. Desde estos centros localizamos los 12 nuevos puntos de tangencia a las tres circunferencias originales y las curvas SOLUCIÓN.