GEOMETRÍA PLANA

01 – TRIÁNGULOS → CLASIFICACIÓN

02 – POLÍGONOS → DADO EL RADIO

→ DADO EL LADO

→ MÉTODO GENERAL

→ AMPLIACIÓN / REDUCCIÓN

03 – EQUIVALENCIAS

04 – ARCO CAPAZ

05 – PROPORCIONALIDAD / SECCIÓN ÁUREA

06 – GIRO / TRASLACIÓN / SIMETRÍA

07 – HOMOLOGÍA + AFINIDAD

08 – TANGENCIAS → RECTAS TANGENTES

→ CURVAS TANGENTES

09 – CURVAS TÉCNICAS

10 – CURVAS CÍCLICAS

11 – CURVAS CÓNICAS

↳ Y SUS TANGENTES.

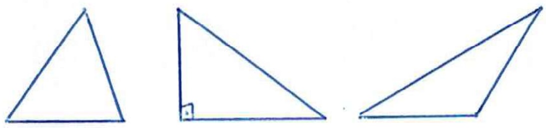
TRIÁNGULOS

LOS TRIÁNGULOS SE PUEDEN CLASIFICAR RESPECTO A:

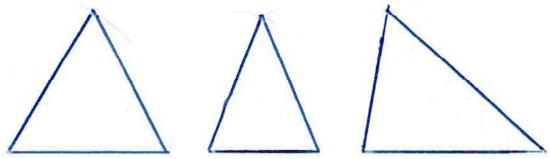
① - SUS ÁNGULOS: Agudo - Rectángulo - Obtuso

② - SUS LADOS: Equilátero - Isósceles - Escaleno.

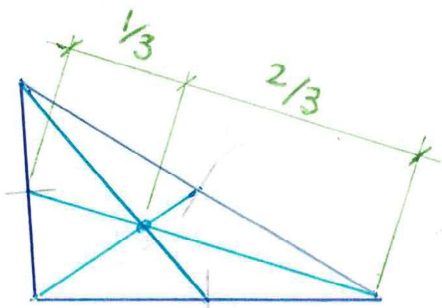
①



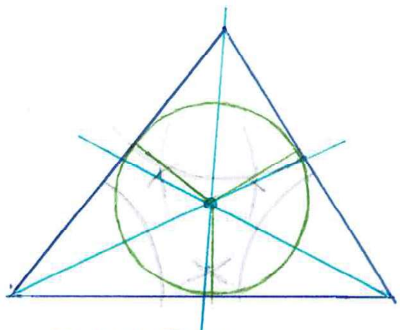
②



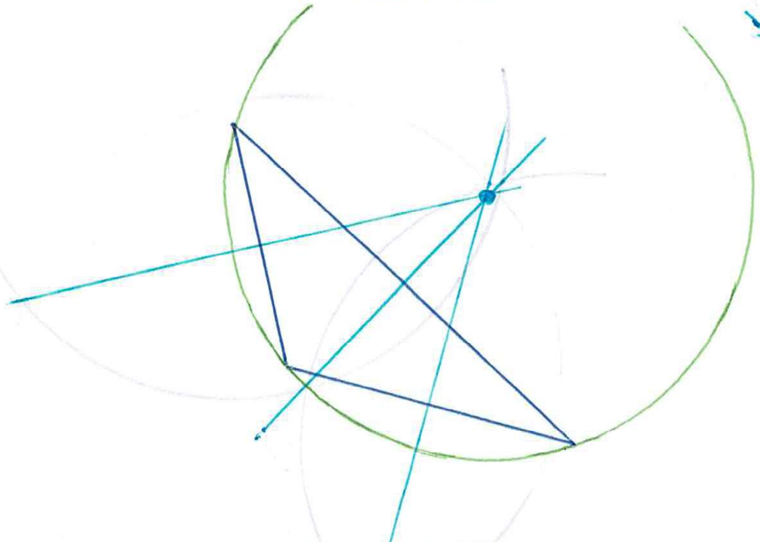
CENTROS Y CARACTERÍSTICAS:



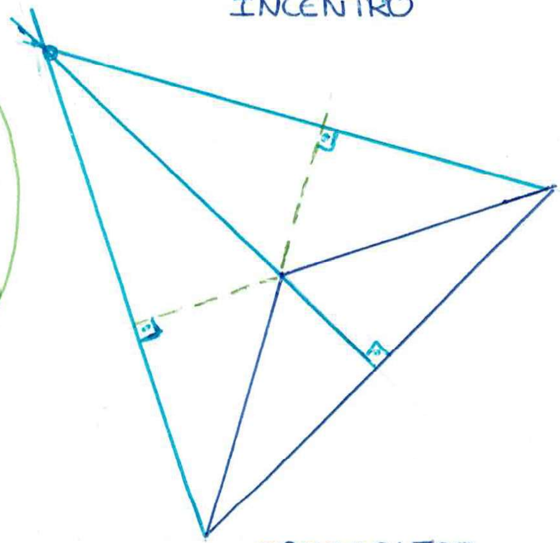
BARICENTRO



INCENTRO



CIRCUNCENTRO



ORTOCENTRO

- BARICENTRO → es el centro de las medianas (pto medio del lado al vértice opuesto) es el centro de gravedad y se encuentra a 1/3 - 2/3
- INCENTRO → es el centro de las bisectrices. Y el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

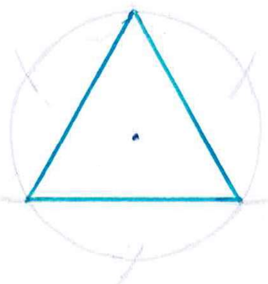
- CIRCUNCENTRO → es el centro de las mediatrices de los lados (puede estar fuera del triángulo) Es el centro de la circunferencia circunscrita que pasa por los vértices.

- ORTOCENTRO → es el centro de las alturas. (desde el vértice en $\perp$ al lado opuesto) PUEDE ESTAR FUERA DEL TRIÁNGULO.

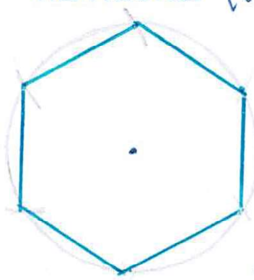
POLÍGONOS

* CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES DADO EL RADIO:

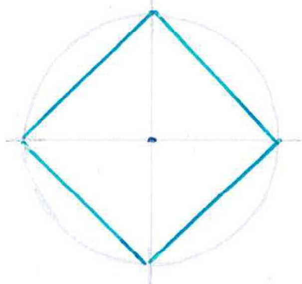
TRIÁNGULO (3)



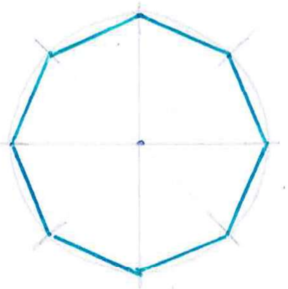
HEXÁGONO (6)



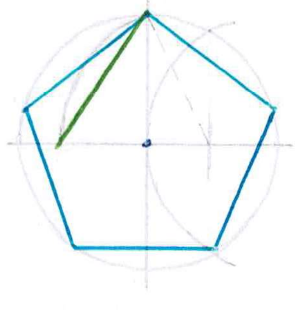
CUADRADO (4)



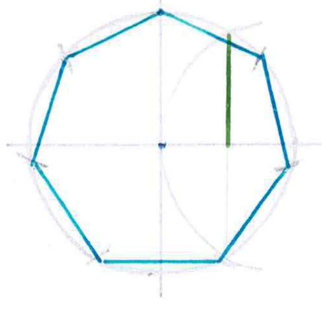
OCTÓGONO (8)



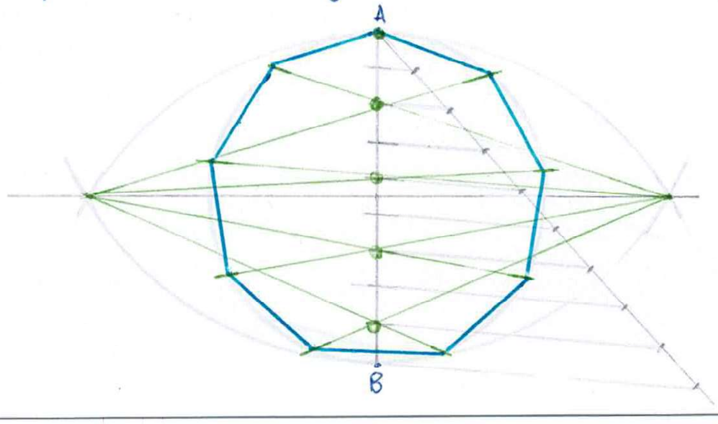
PENTÁGONO (5)



HEPTÁGONO (7)



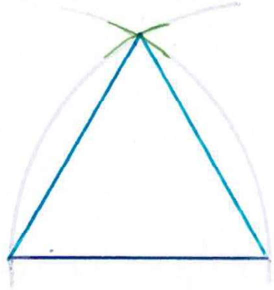
↳ A partir del Eneagono (9) → Método general.



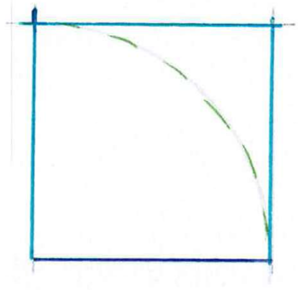
- 1° Se trazan dos Ø opuestos
  2° Se traza arco desde AB con radio el Ø → ojo
  3° División AB en 9 partes.
  4° Pasar rectas por una <u>sí</u> y otra <u>no</u>

* CONSTRUCCIÓN DADO EL LADO:

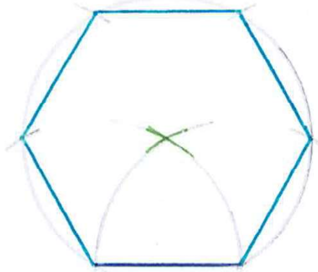
TRIÁNGULO



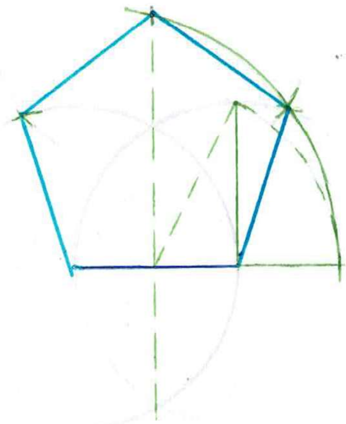
CUADRADO



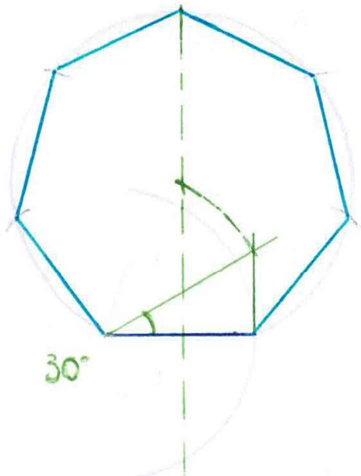
HEXÁGONO



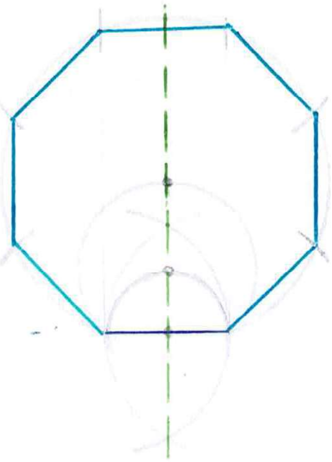
PENTÁGONO



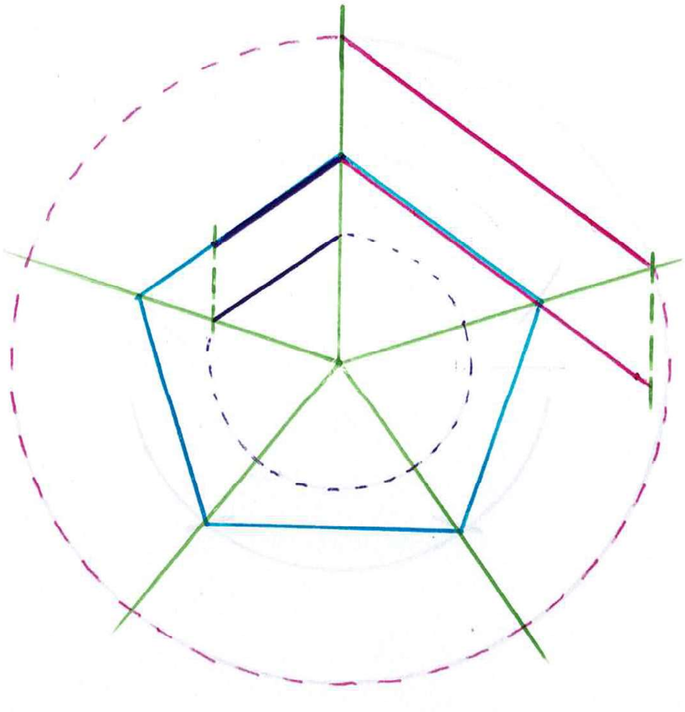
HEPTÁGONO



OCTÓGONO



* Método de Ampliación/Reducción de cualquier Polígono.

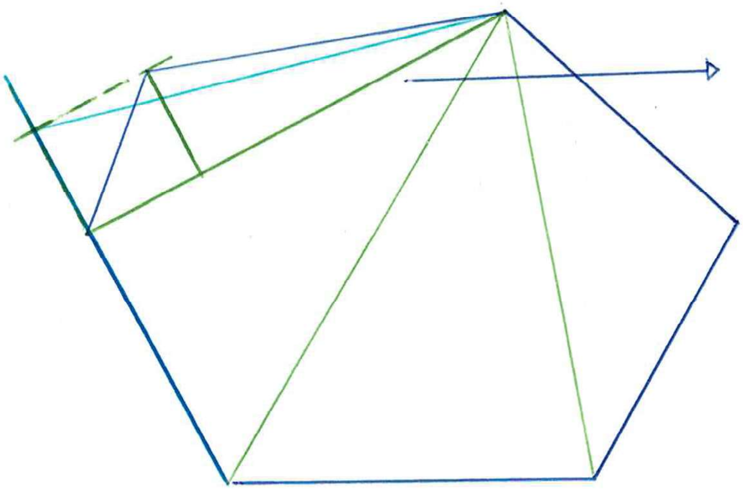


EQUIVALENCIAS

* Cuando se pide un polígono EQUIVALENTE a otro, quiere decir que tienen el mismo área.

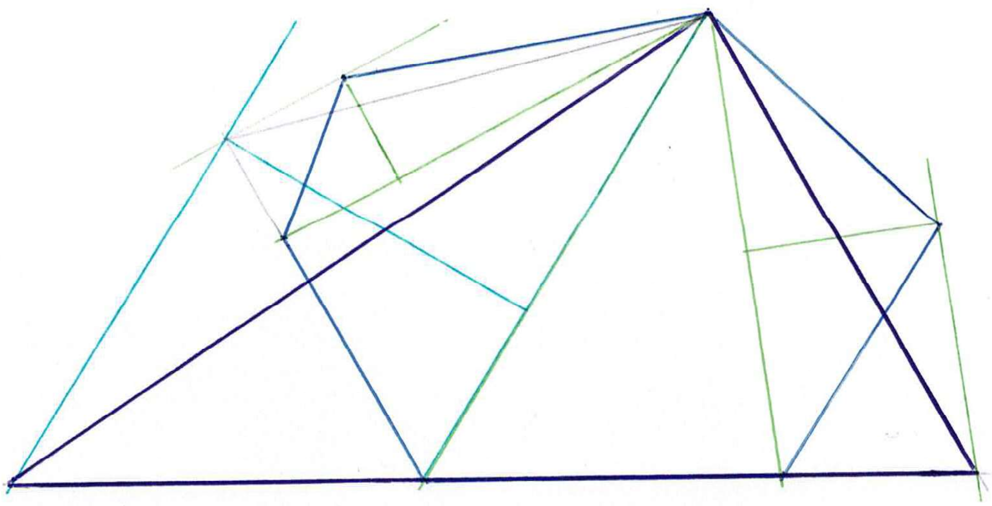
Para transformar un polígono en un triángulo lo fragmentaremos en triángulos y cambiaremos sus proporciones (manteniendo el área)

* Recordamos:
  - Área del rectángulo : $b \times h$
  - Area del cuadrado : $l \times l$
  - Área del triángulo : $\frac{b \times h}{2}$



Escogemos un triángulo
Utilizamos como base el lado interior (el nuevo)

- Mantenemos la altura y dibujamos un nuevo triángulo utilizando como lado la proyección del contiguo.

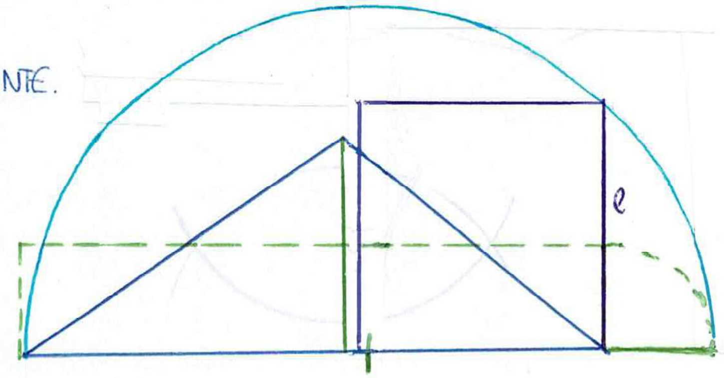


* CONVERTIR UN TRIÁNGULO EN UN CUADRADO

1° – RECTANGULO EQUIVALENTE.

2° – CUADRADO $b \times h = l^2$

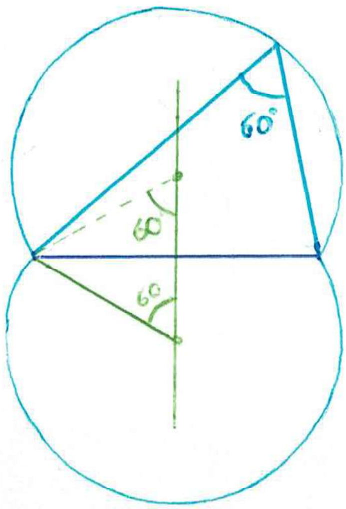
(a través de la media proporcional)



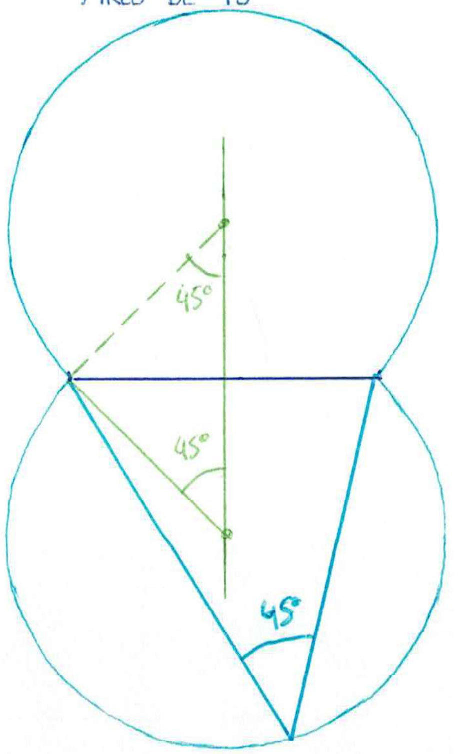
ARCO CAPAZ

UN ARCO CAPAZ es una curva que parte de los extremos de un segmento y desde cualquier punto de ese arco se engloba al segmento con un ángulo determinado.

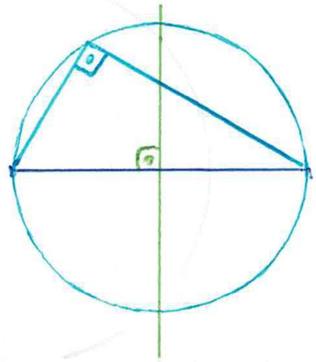
ARCO CAPAZ DE 60°



ARCO DE 45°



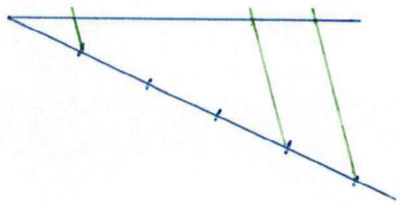
ARCO DE 90°
(circunferencia)



PROPORCIONALIDAD — SECCIÓN AÚREA

* TEOREMA DE THALES → Establece una relación de <u>Semejanza</u> de triángulos mediante lados (segmentos) paralelos.

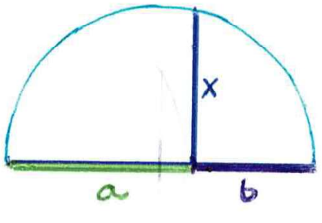
SE UTILIZA PARA ESCALAR PROPORCIONES.



MEDIA PROPORCIONAL

Relación de semejanza: $\frac{A}{X} = \frac{X}{B}$

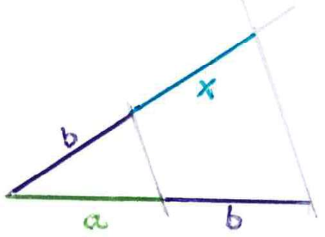
A es a X, como X es a B



TERCERA PROP.

$\frac{A}{B} = \frac{B}{X}$

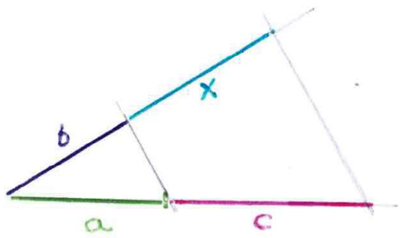
A es a B, como B es a X



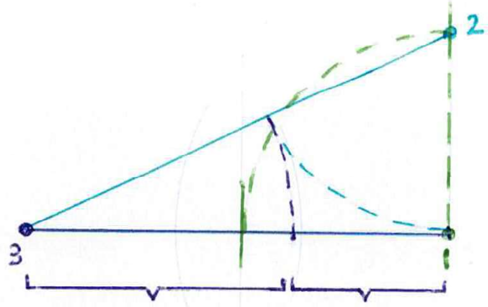
CUARTA PROP.

$\frac{A}{B} = \frac{C}{X}$

A es a B, como C es a X



SECCIÓN AÚREA DE UN SEGMENTO φ



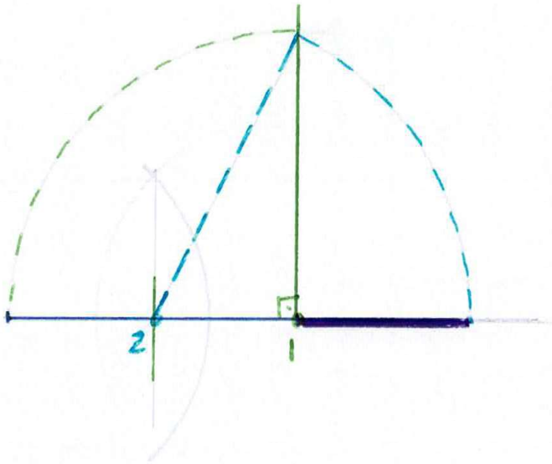
División aúrea de un segmento:

1° - mediatziz.

2° - arco con centro en 1

3° - (mismo radio) arco con centro en 2

4° - arco con centro en 3.



Construcción del segmento, dada la división mayor:

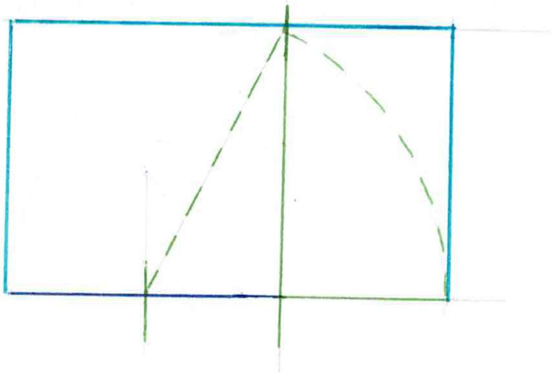
1° - Alargamos el segmento.

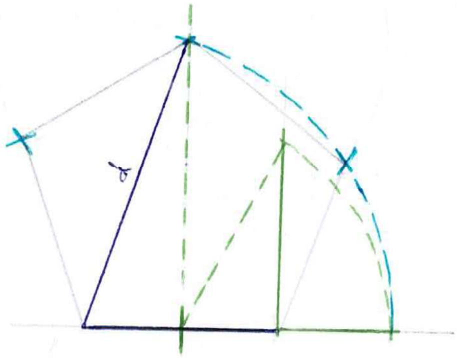
2° - mediatriz y ⊥ por un extremo

3° - Arco con centro en 1

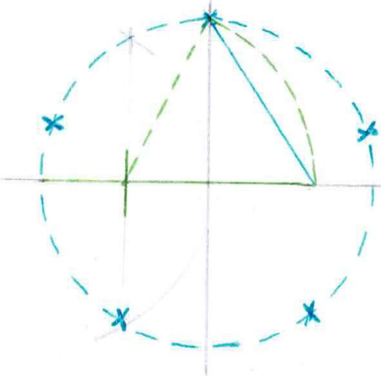
4° - Arco con centro en 2

CONSTRUCCIÓN DEL RECTÁNGULO AUREO. / RELACIÓN CON EL PENTÁGONO.

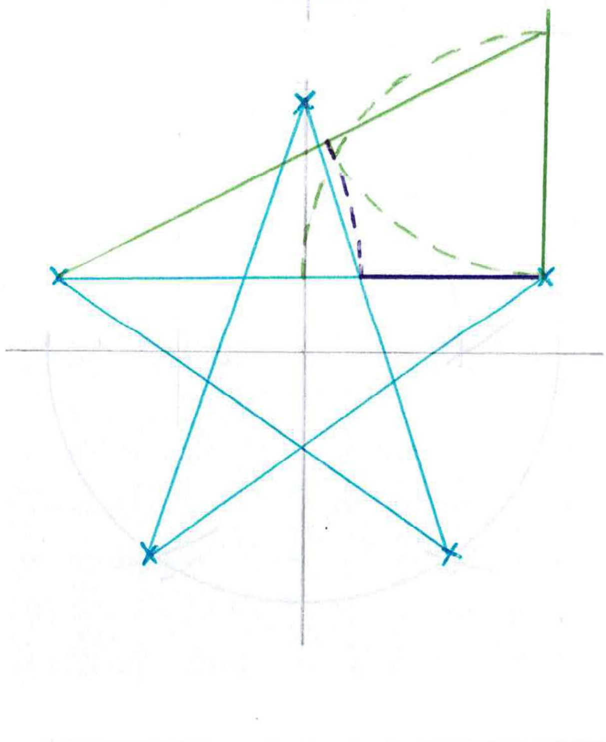




- En el rectángulo la relación entre el lado largo y el corto es aúrea.



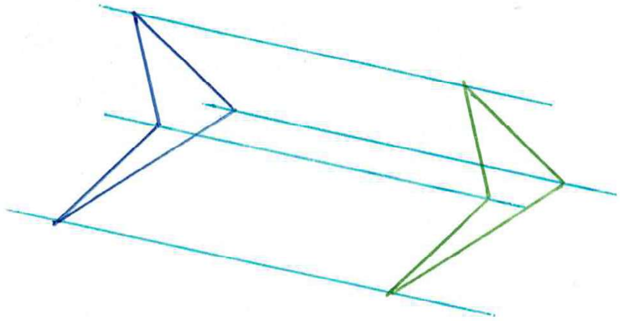
- En el pentágono, entre el lado y la diagonal



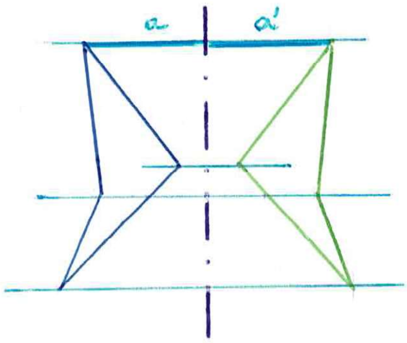
- En el polígono estrellado derivado del pentágono, la relación entre el lado de vértice a vértice y la fracción que secciona otro lado también es aúrea.

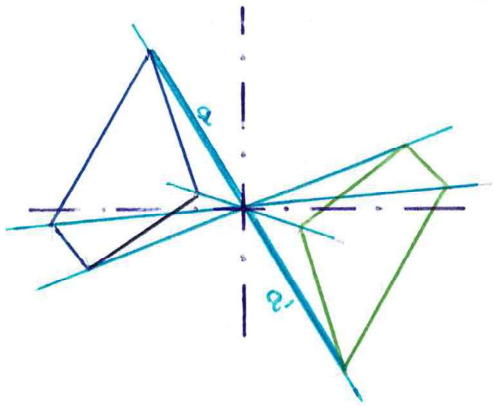
GIRO - TRASLACIÓN - SIMETRÍA

* La traslación es el movimiento más sencillo.
  Requiere una dirección y una separación:

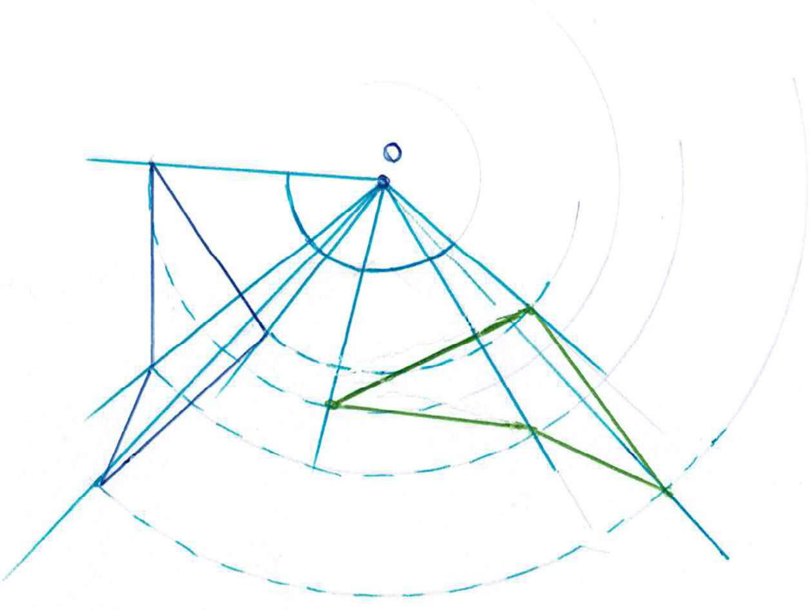


* La SIMETRÍA puede ser AXIAL (respecto a un eje)
  CENTRAL (respecto a dos ejes)





* Los GIROS requieren de un centro de Rotación y un ángulo.



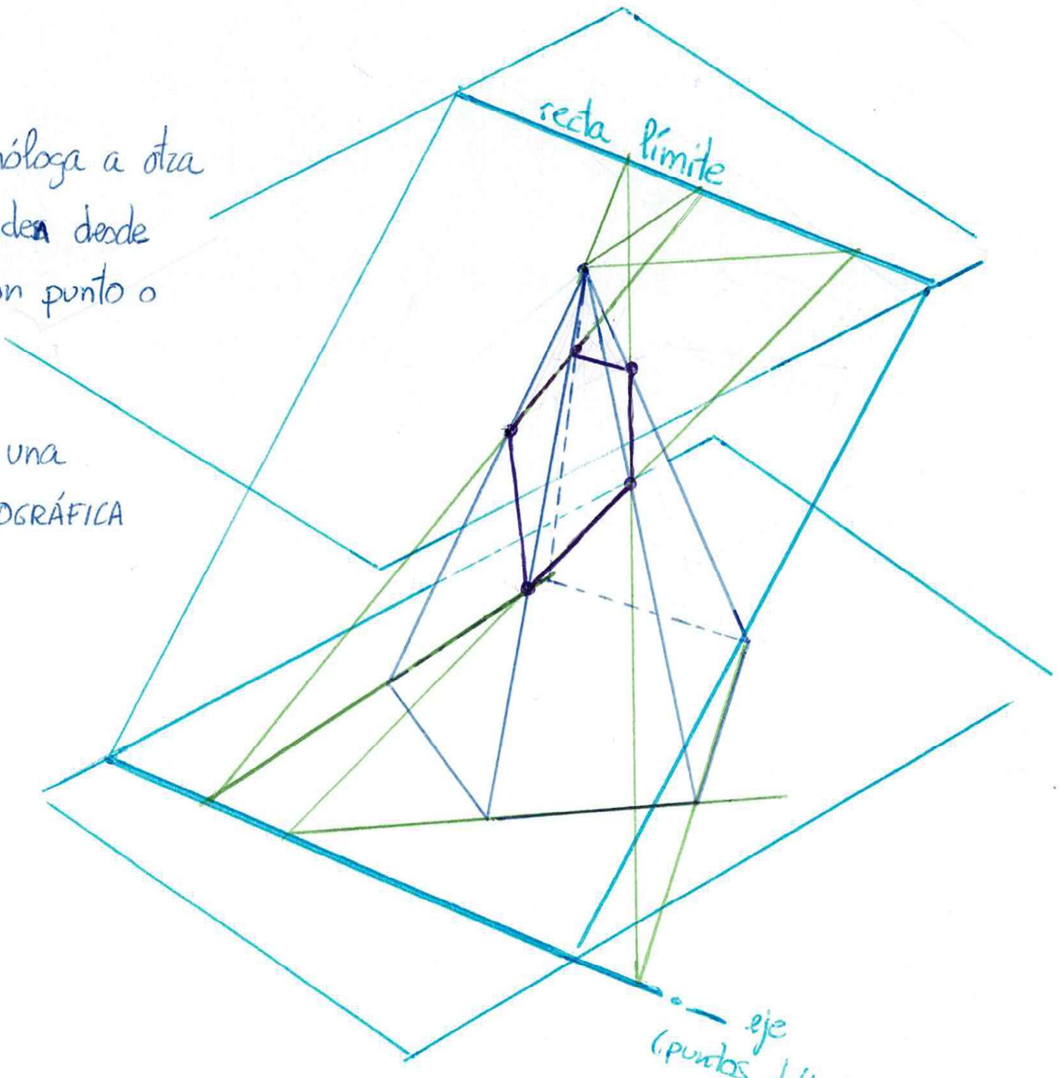
* Recordamos:

  Los ángulos se miden desde la horizontal y en sentido antihorario

HOMOLOGÍA + AFINIDAD

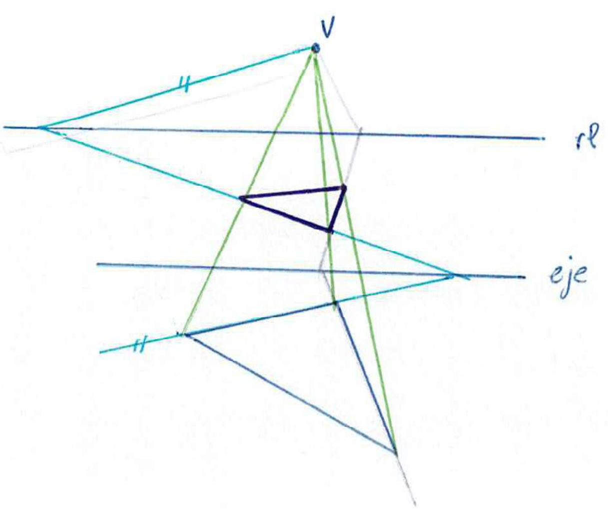
Una figura es homóloga a otra cuando se corresponden desde la proyección de un punto o vertice.

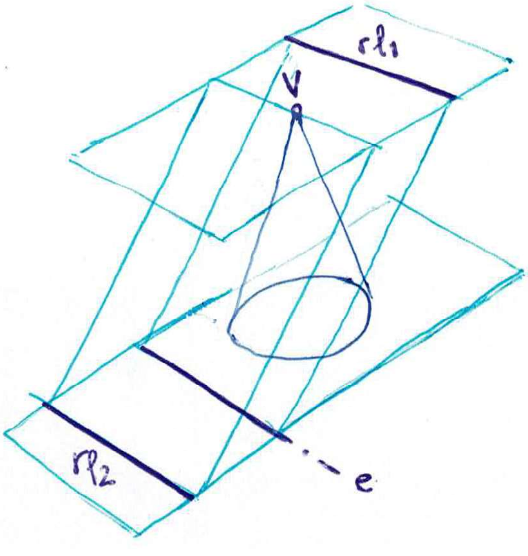
Una homología es una TRANSFORMACIÓN HOMOGRÁFICA



SON NECESARIOS:

- Un eje.
- Una recta límite (que es la proyeccion del eje sobre el plano // que pasa por el vértice).
- PUEDE HABER: una segunda recta límite (resultante de pasar un plano // al plano de corte por el vértice)

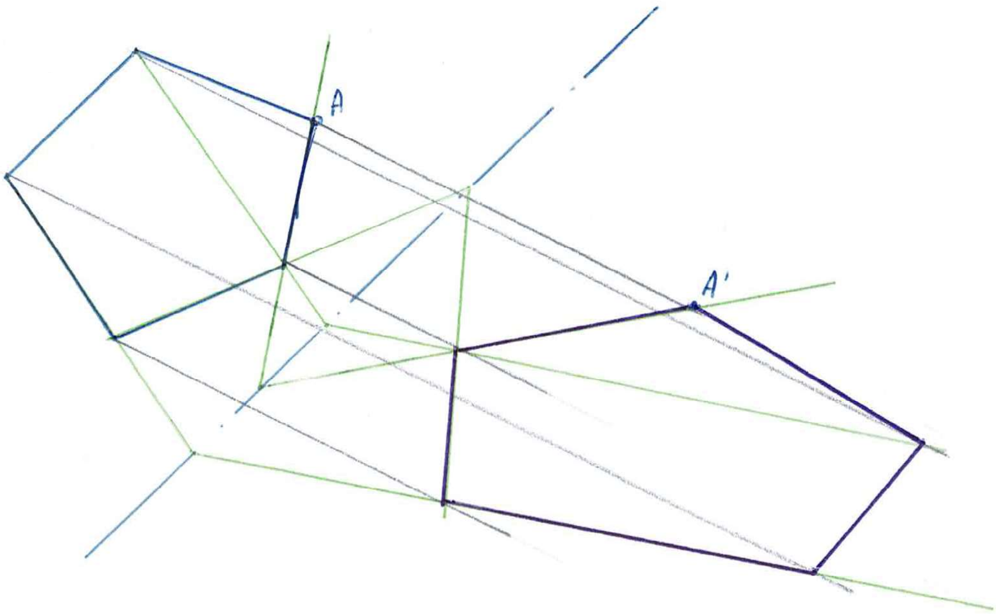




AFINIDAD:

* La Homología Afín o afinidad es un caso particular de la homología en la que el vértice es un punto impropio situado en el infinito. Por tanto los vertices homólogos (afines) se unen todos en una misma dirección (rayos paralelos)

POR TANTO PARA DETERMINAR UNA AFINIDAD ES NECESARIO:
- el eje
- un par de puntos afines
- la dirección de afinidad.

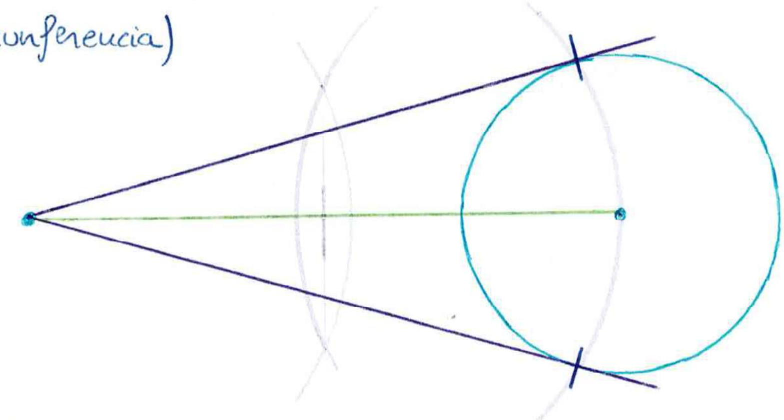


TANGENCIAS - ENLACES

DENTRO DE LAS TANGENCIAS DISTINGUIMOS: RECTAS TANGENTES
CURVAS TANGENTES (enlaces)

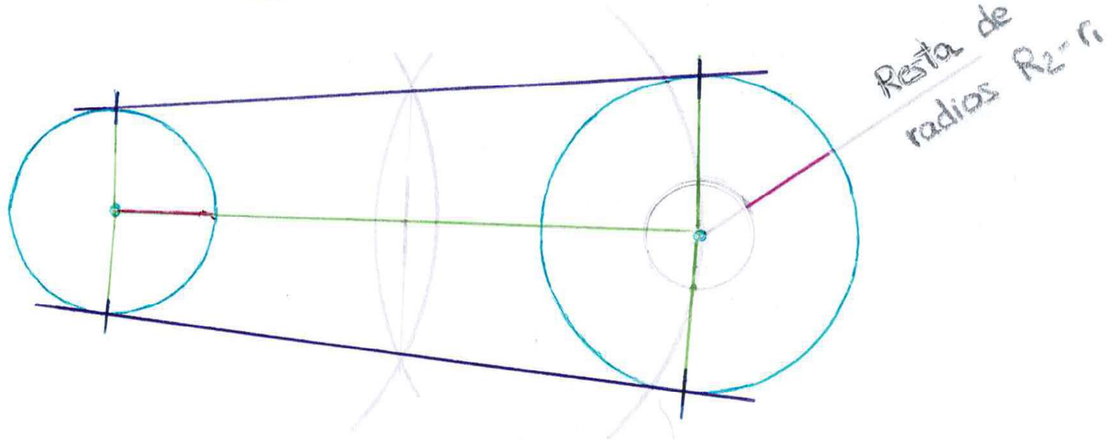
RECTAS TANGENTES

DESDE UN PUNTO EXTERIOR:
(a una circunferencia)

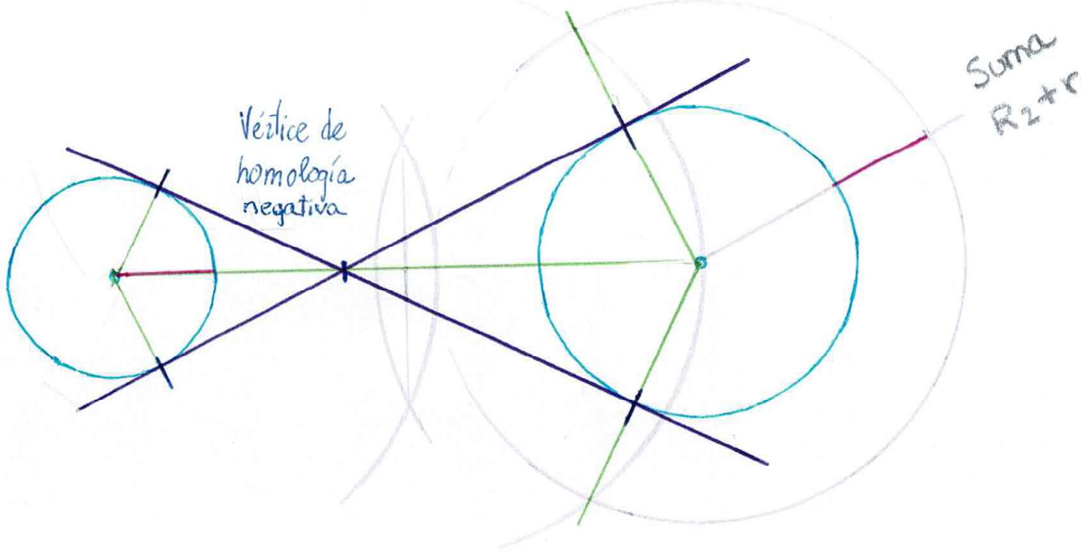


ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS:

Tangentes exteriores



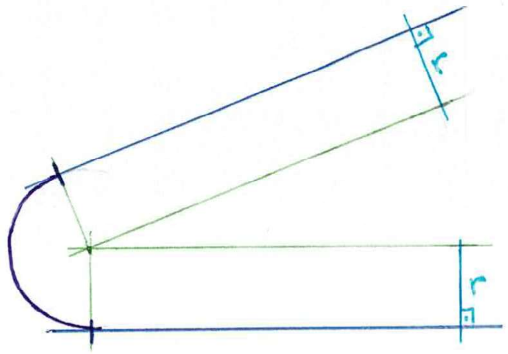
Tangentes interiores.

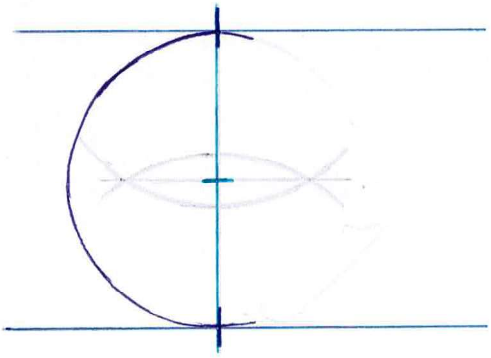


CURVAS TANGENTES

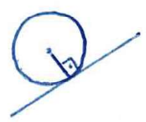
* ENTRE DOS RECTAS

(dado el radio de la curva)

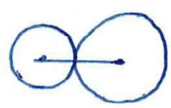




* Recordamos:



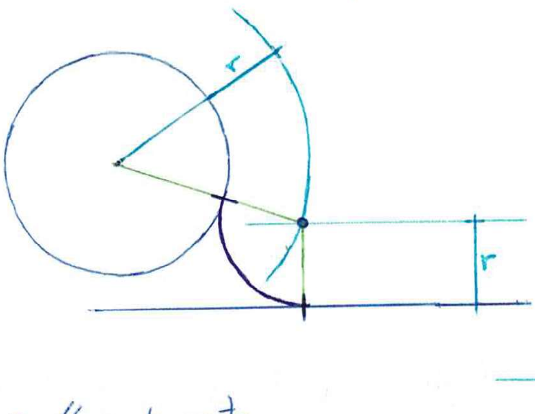
Una recta es ⊥ al radio de la curva en el punto de tangencia



Dos curvas son tangentes entre sí cuando sus radios están alineados

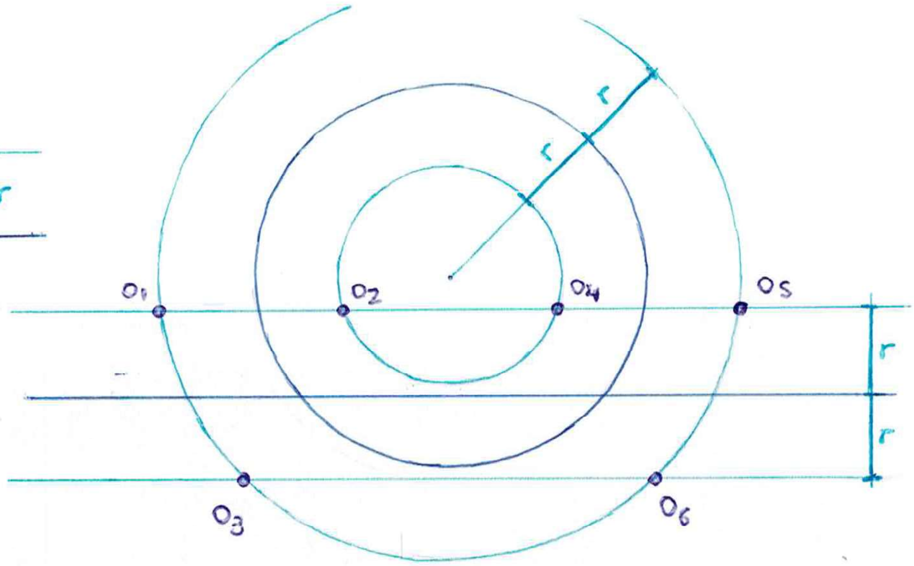
* ENTRE RECTA Y CURVA

(dado el radio)

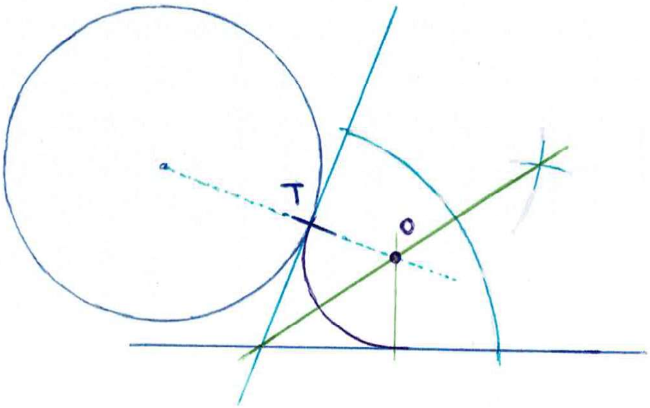


- // a la recta
- y "//" a la curva (circunf. concéntrica)

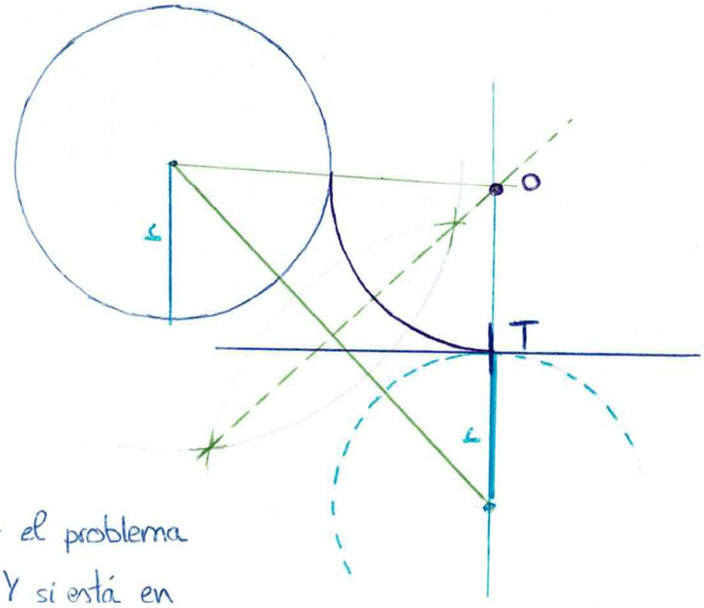
→ Si la recta y la circunferencia se cortan → HASTA 6 SOLUCIONES



* ENTRE RECTA Y CURVA
DADO EL PUNTO DE TANGENCIA
EN LA <u>CURVA</u>



* ENTRE RECTA Y CURVA
DADO EL PUNTO DE TANGENCIA
EN LA <u>RECTA</u>



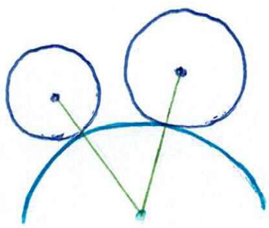
TRUCO: Cuándo el punto de tangencia esta en la recta hay qe tratar el problema como si fuesen dos curvas. Y si está en la curva, como dos rectas.

* <u>ENTRE DOS CURVAS</u>

(dado el radio)

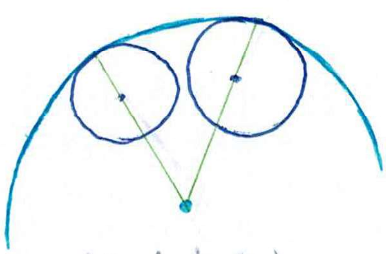
↳ 3 TIPOS

TANGENTES POR EL EXTERIOR



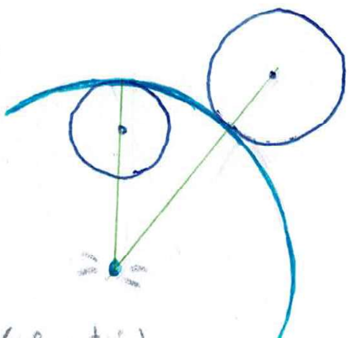
(la rana)

TANGENTES POR EL INTERIOR



(la lechuza)

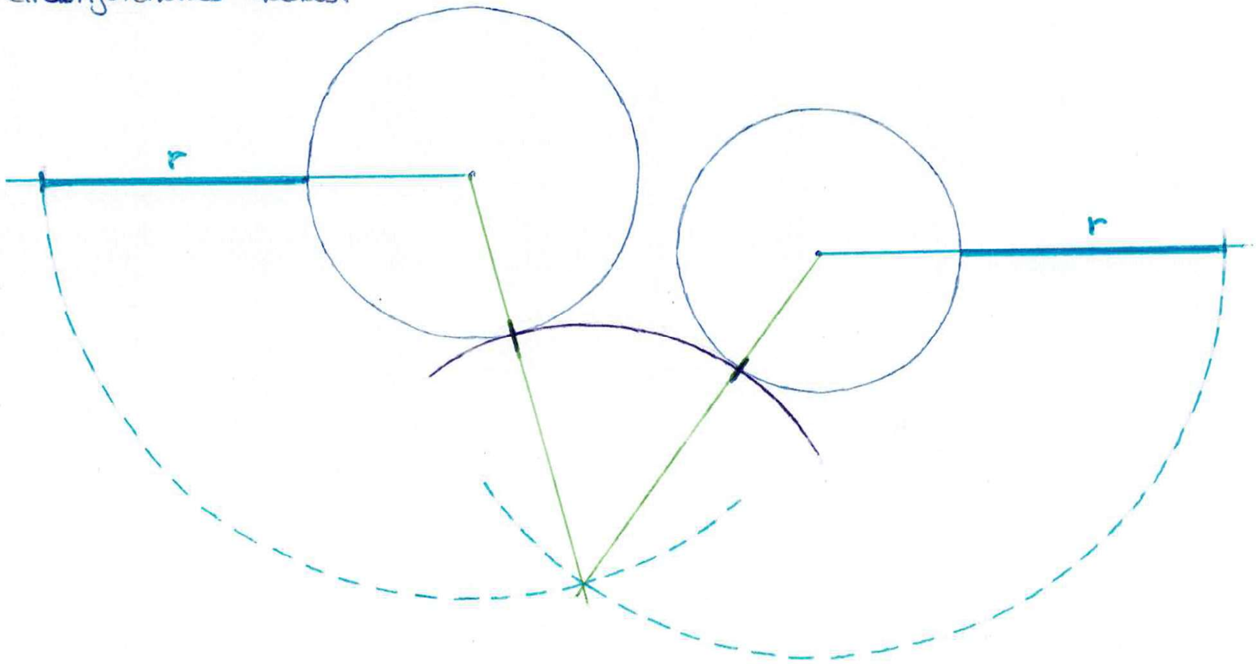
UNA TANGENTE EXTERIOR Y OTRA INTERIOR



(el ratón)

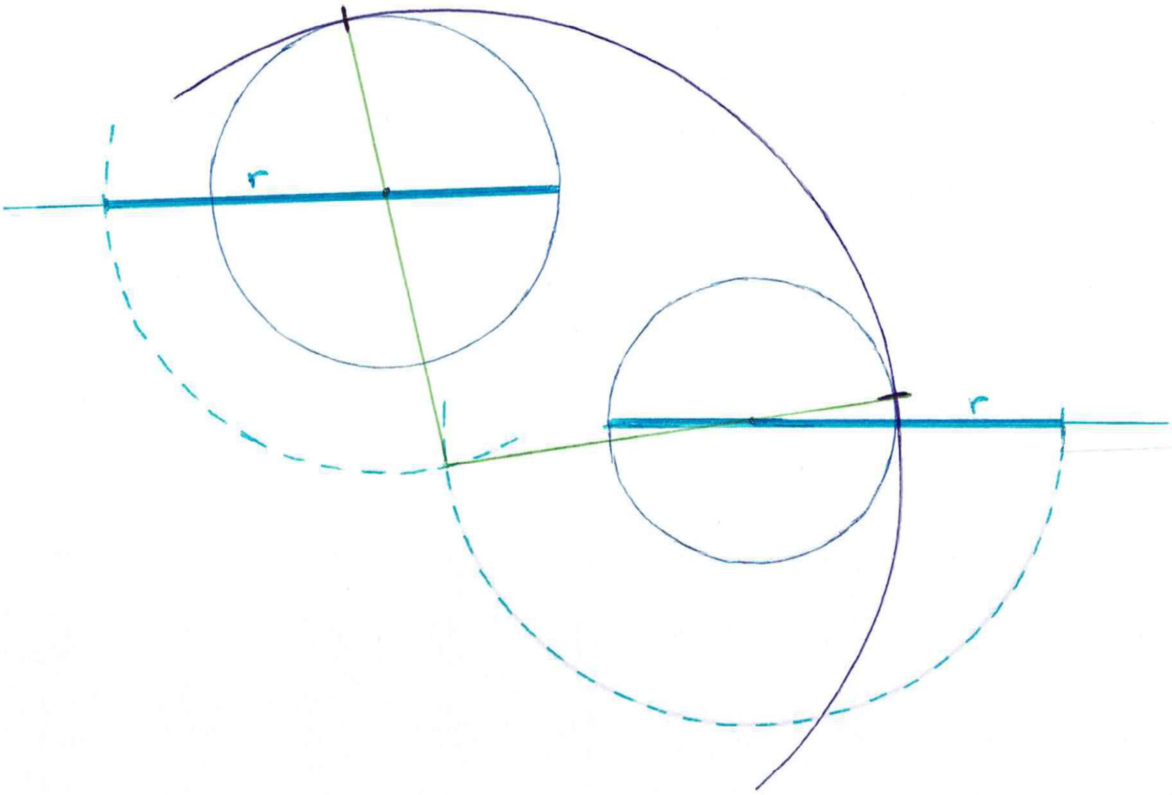
- TANGENTES POR EL EXTERIOR:

↳ hay que sumar el radio de tangencia a los de las circunferencias dadas:



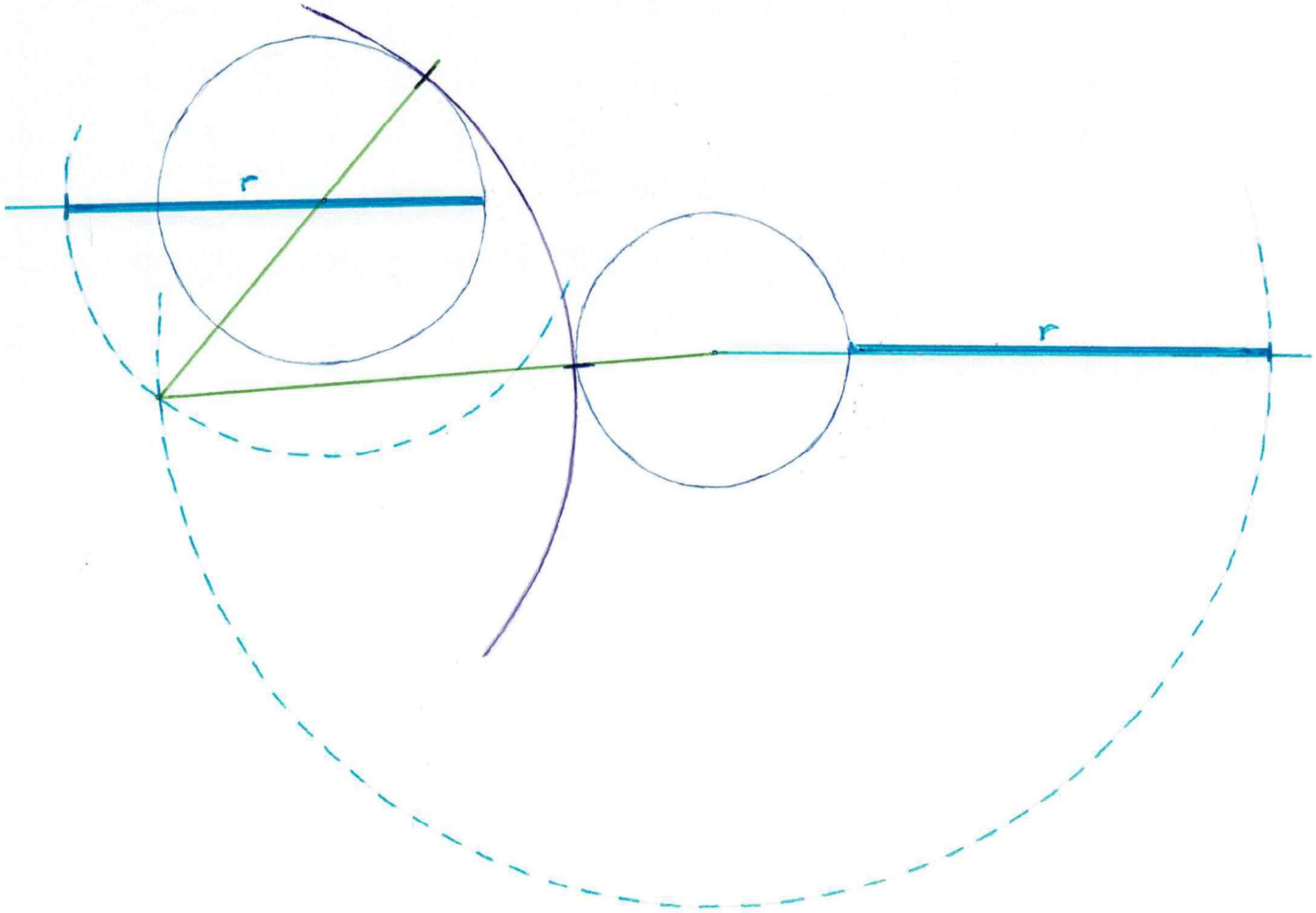
- TANGENTES POR EL INTERIOR

↳ hay que colocar el radio de tangencia conteniendo al Ø entero.
El radio SIEMPRE debe ser mayor que los Øs de las circunferencias



- TANGENTE POR EL EXTERIOR Y EL INTERIOR

(una de cada)



CURVAS TÉCNICAS

- Son las que podemos hacer con COMPÁS

ÓVALOS Y OVOIDES.

* Los OVALOS son figuras simétricas (equiparables a las elipses)
* Los OVOIDES tienen forma de Huevo

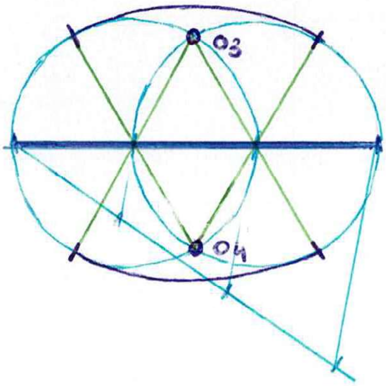
↳ se pueden hacer dado:

— EL EJE MAYOR
— EL EJE MENOR
— LOS DOS EJES.

los ejes entre ellos son ORTOGONALES.

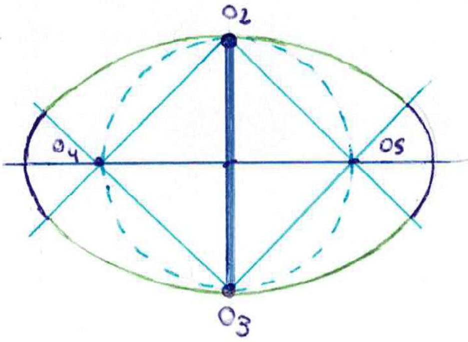
✱ OVALOS :

• dado el EJE MAYOR



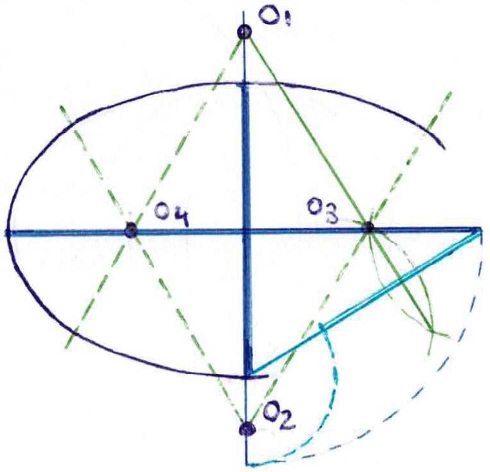
- división en 3 partes
- circunf. en las divisiones 1 y 2
- Ptos de corte → nuevos centros $O_3 - O_4$

• dado el EJE MENOR



- mediatriz, centro y circunf.
- arcos desde O_2 y O_3
- arcos desde O_4 y O_5

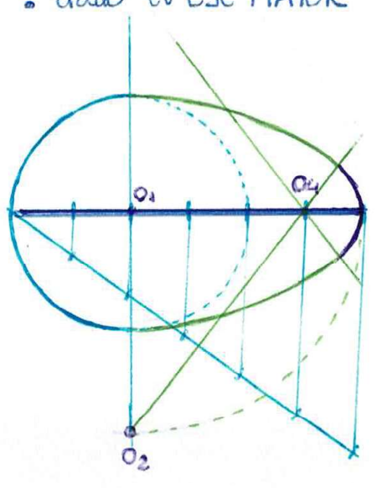
• dados ambos EJES



- Colocar el semiejemayor sobre el menor. Unir vértices
- Trasladar medida restante a la diagonal.
- mediatriz de la diagonal restante. hasta llegar a la prolongación del eje menor. — CENTRO O_1
- O_2 (simétrico de O_1)
  O_4 (simétrico de O_3)

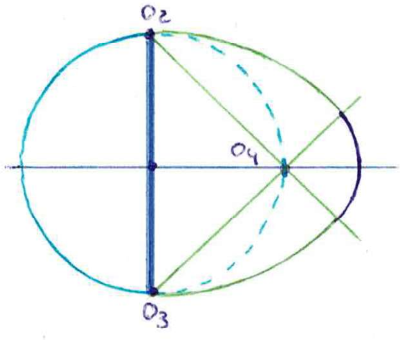
✱ OVOIDES :

. dado el EJE MAYOR



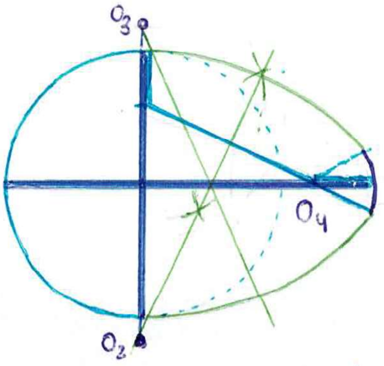
- división del eje en 6 PARTES
- Circunf. de radio (parte 2) O_1
- Traslado del semieje mayor sobre el menor — O_2
  (O_3 — simétrico de O_2)
- Arco en O_4

• dado el EJE MENOR



- Circunf. de radio ½ eje.
- Rectas tangentes por O_4
- Circunf. desde O_2 y O_3
- Arco en O_4

• dados ambos EJES.

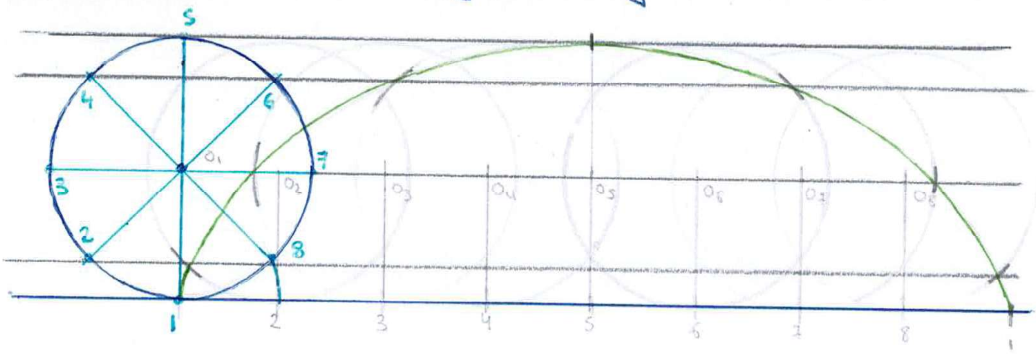


- 1º Colocación adecuada de ambos ejes
- 2º Restar medida ARBITRARIA a ambos ejes
- Diagonal → mediatriz → centro O_2
  O_3 (simétrico de O_2)
- Arcos O_2 y O_3 → Arco O_4

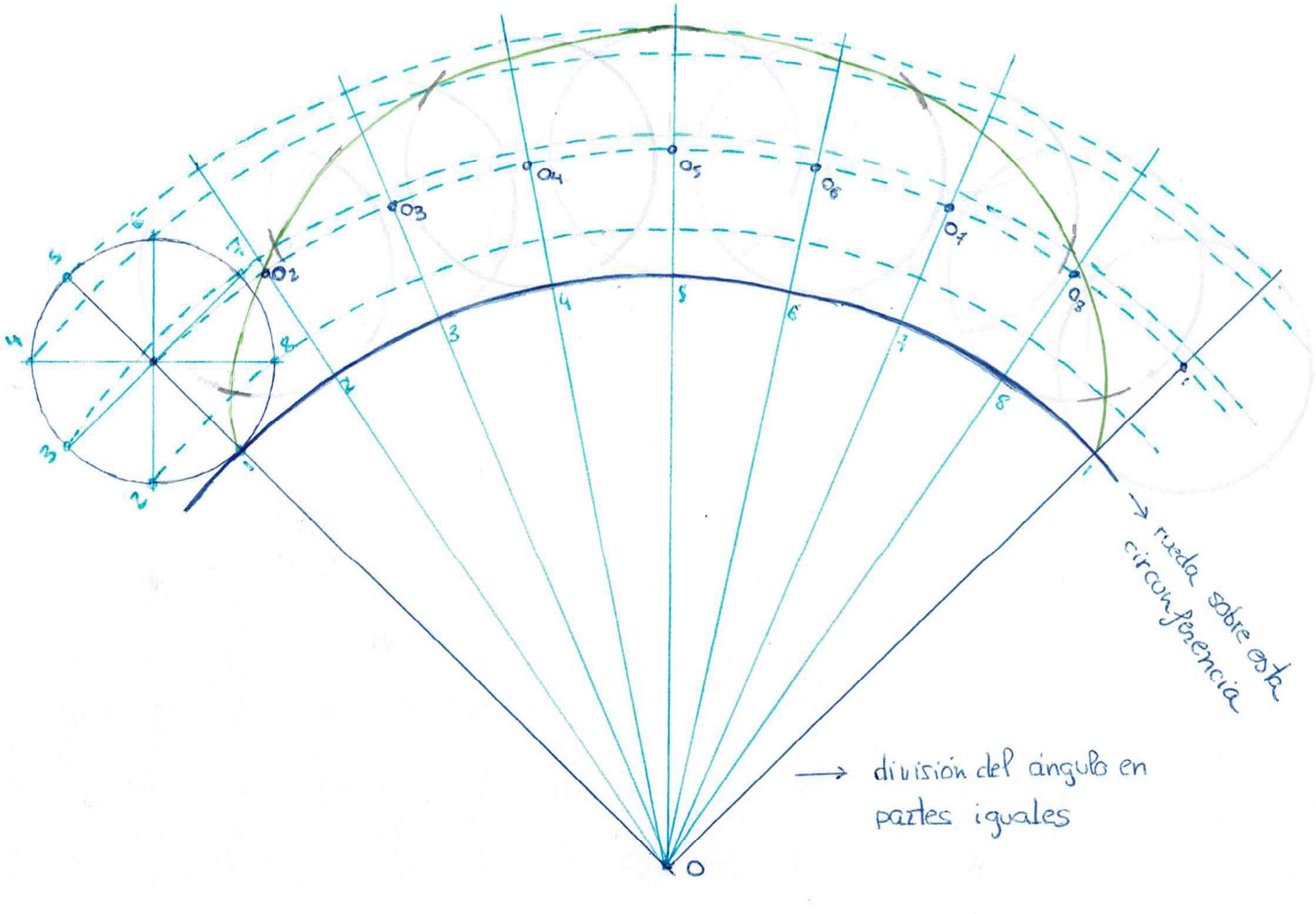
CURVAS CÍCLICAS

Las curvas cíclicas son curvas (a mano) resultantes del giro que hace una circunferencia.

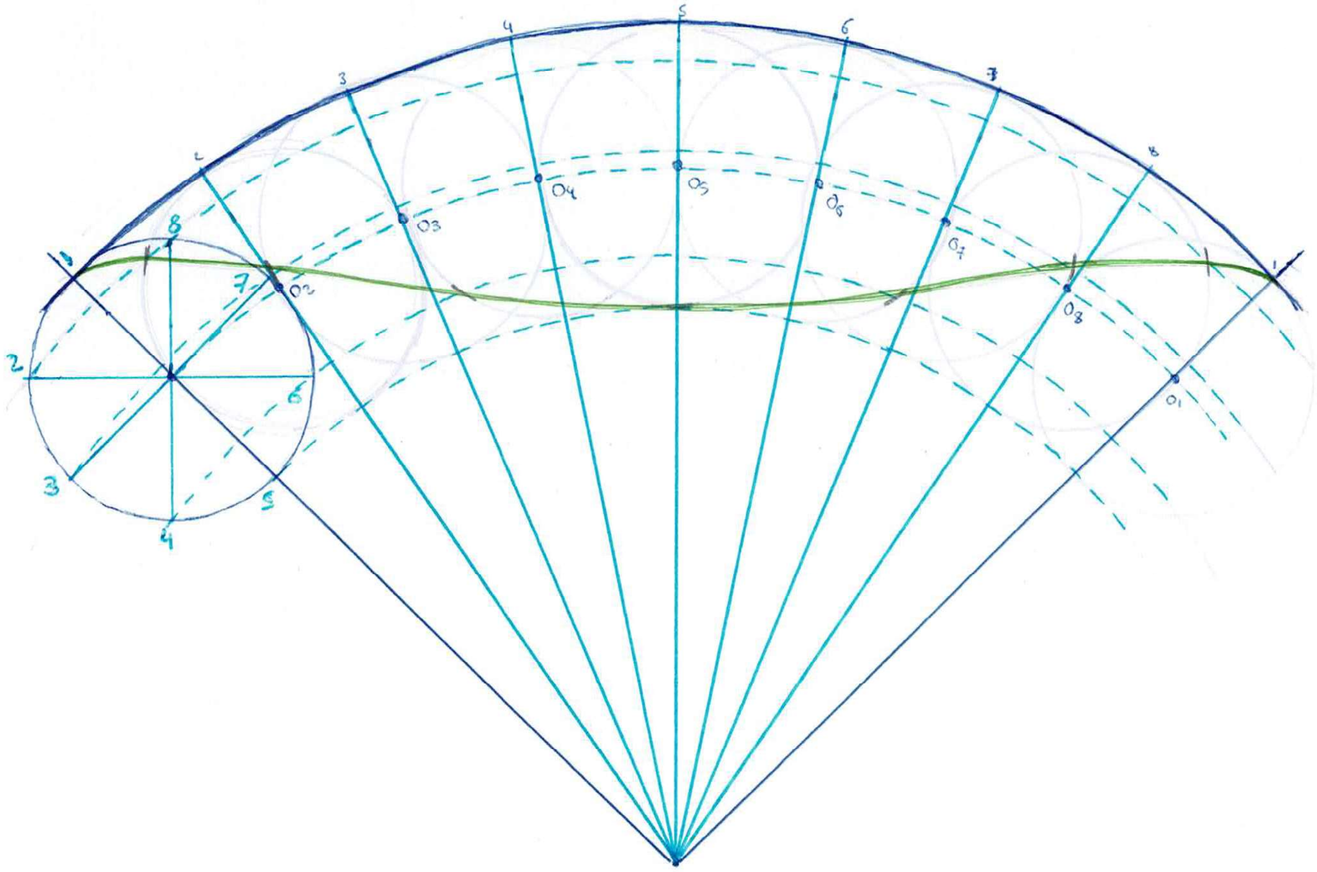
* CICLOIDE → circunferencia que rueda sobre una recta.



* EPICICLOIDE → circunferencia que rueda sobre otra por su cara exterior. un arco determinado (el ángulo puede ser variable)



* HIPOCICLOIDE → circunferencia que rueda sobre otra por su cara interior

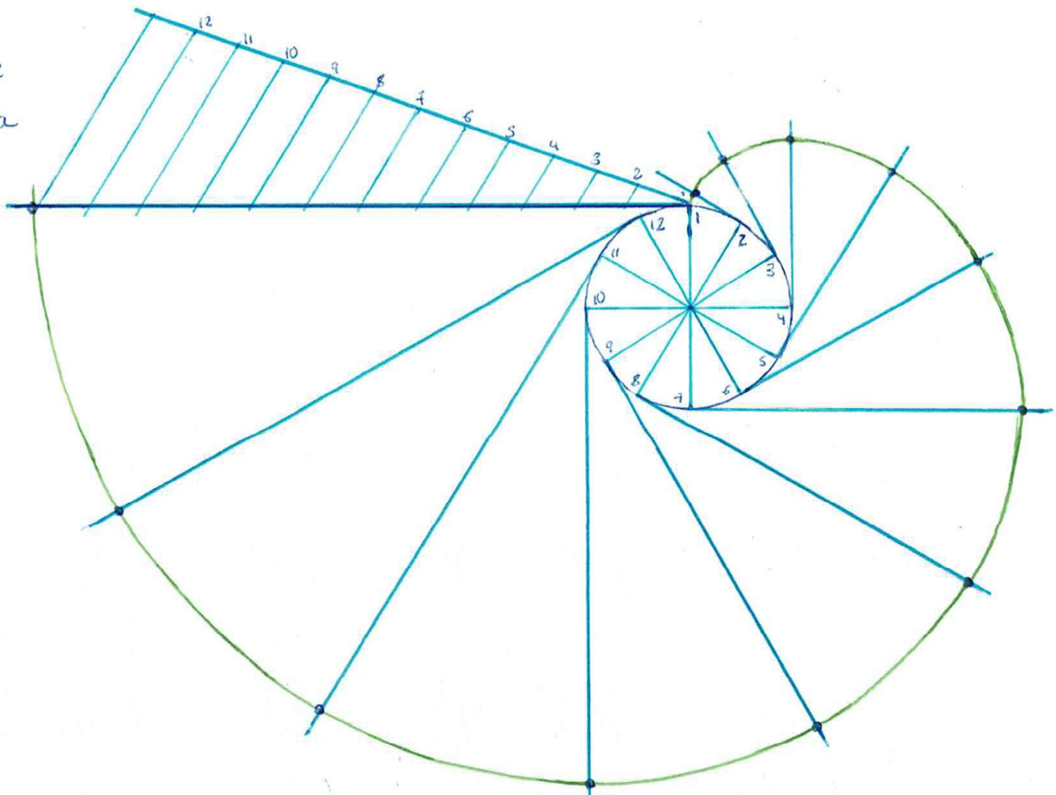


* ENVOLVENTE → es la curva que genera una recta tangente al rodar por una circunferencia. Su crecimiento viene determinado por la inercia.

Rectificación de la circunferencia

$2\pi r$

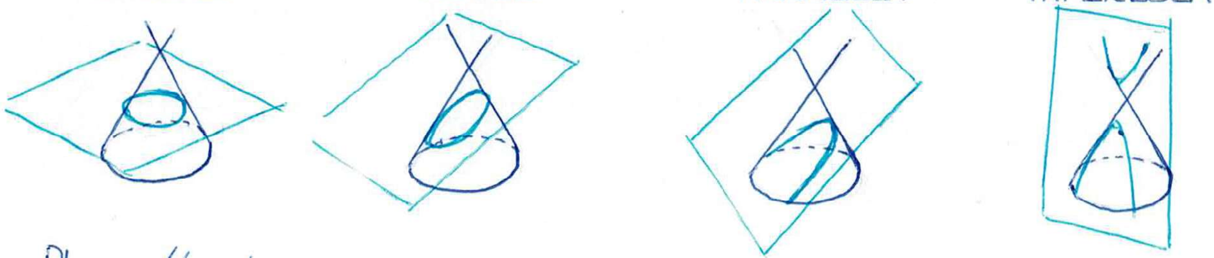
$3\varnothing + \varnothing/7$



CURVAS CÓNICAS

SON 4: las resultantes de cortar un cono con un plano.

CÍRCULO | ELIPSE | PARÁBOLA | HIPÉRBOLA

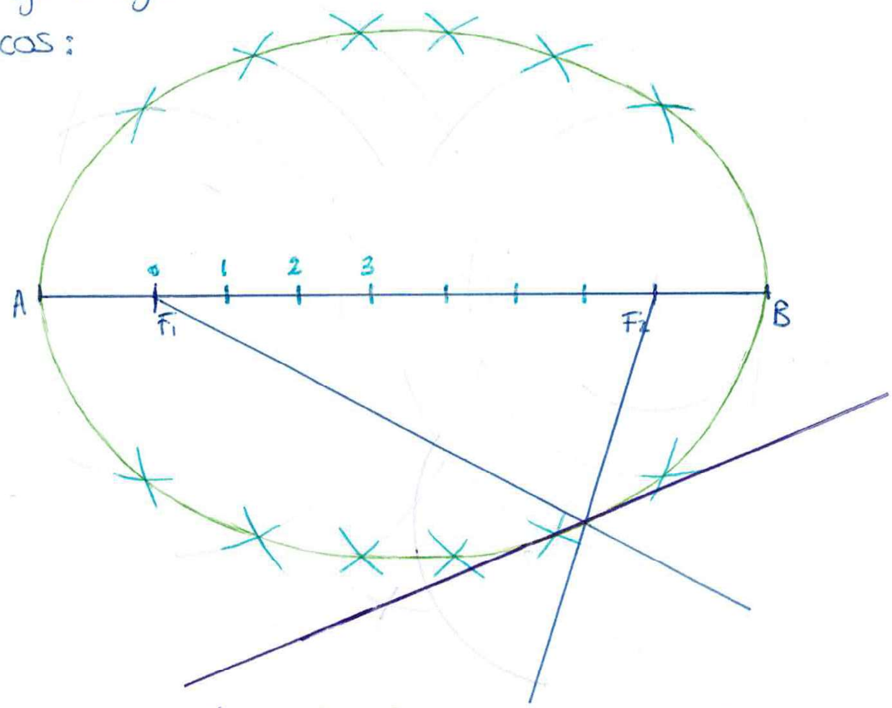


Plano // a la base | Plano oblicuo | Plano // a una generatriz | Plano // al eje.

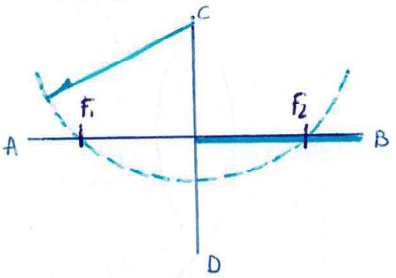
* ELIPSE

- Dado el eje mayor y los focos:

A-1 desde F_1
B-1 desde F_2.

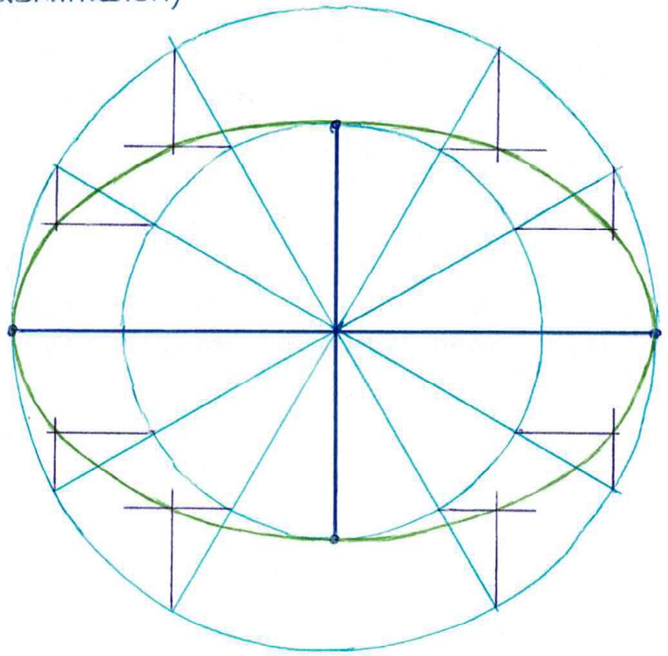


RELACION ENTRE LOS EJES Y LOS FOCOS:

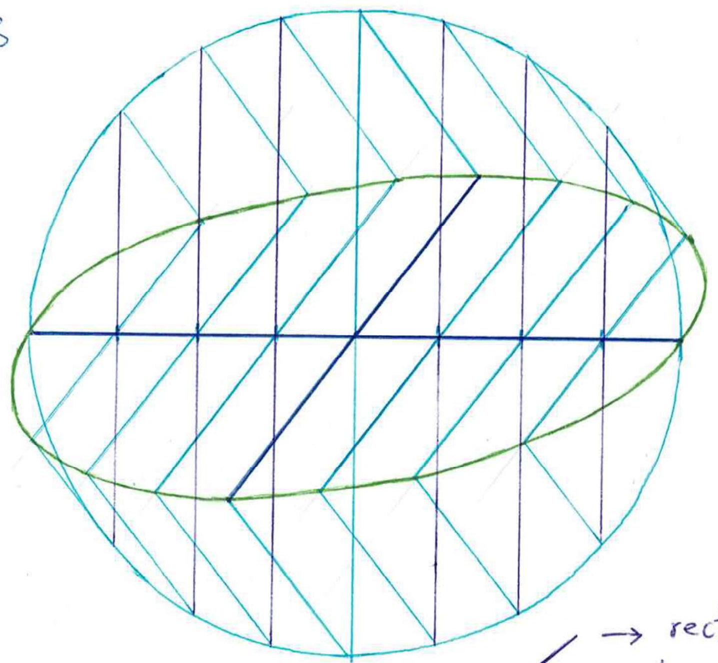


La recta tangente por un punto de la elipse es el resultado de la bisectriz de las rectas que se unen a F_1 y F_2.

- Dados los dos ejes:
(método por aproximación)



- Dados los ejes
CONJUGADOS

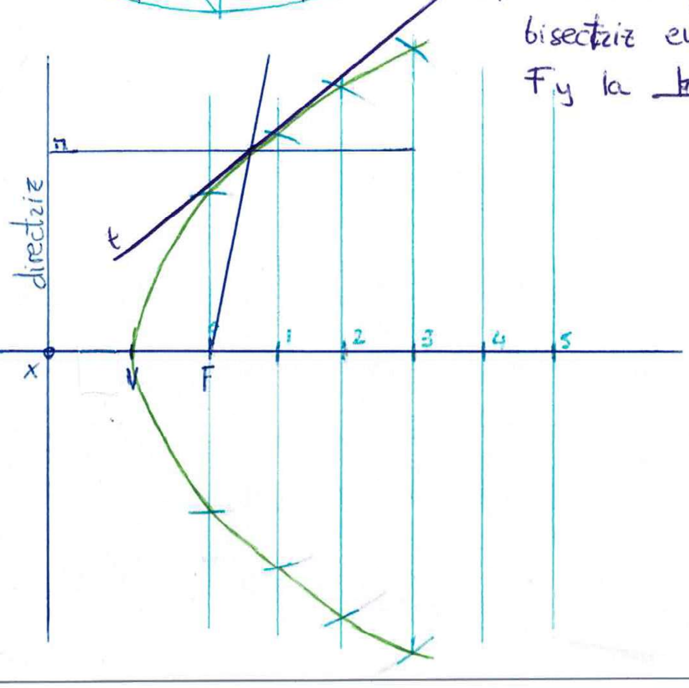


* PARÁBOLA

→ recta tangente en la bisectriz entre la unión con F y la ⊥ a la directriz

distancia del punto de corte X a 1 y desde F a cortar con r_1

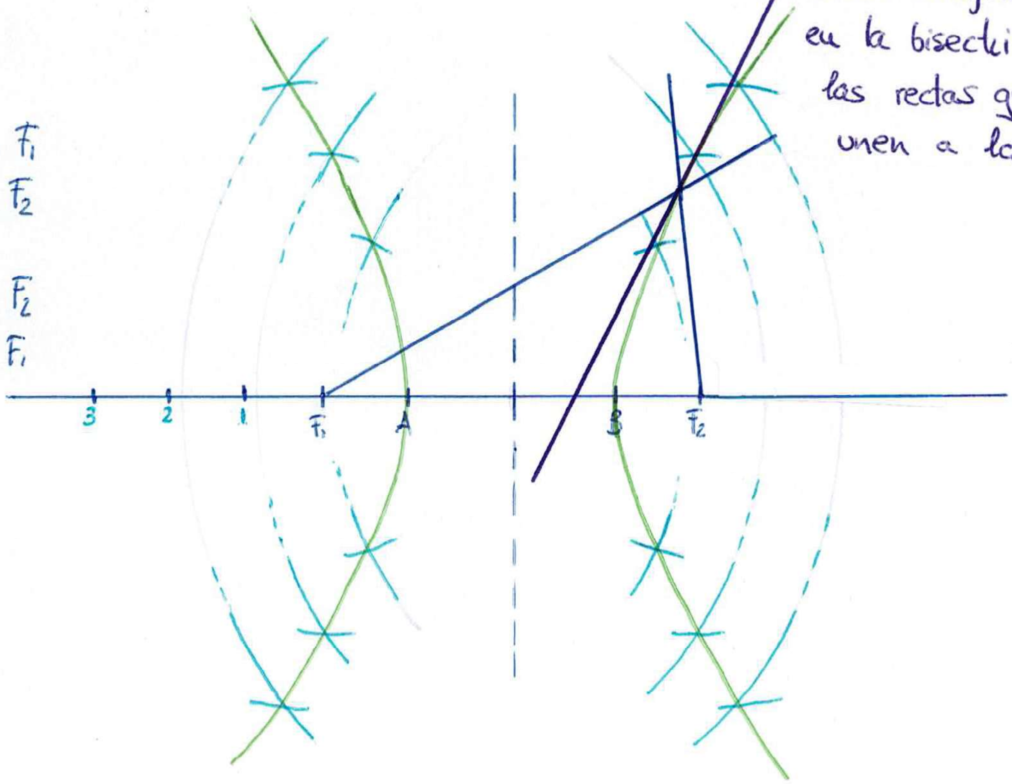
eje



* HIPÉRBOLA

A-1 desde F_1
B-1 desde F_2

A-1 desde F_2
B-1 desde F_1

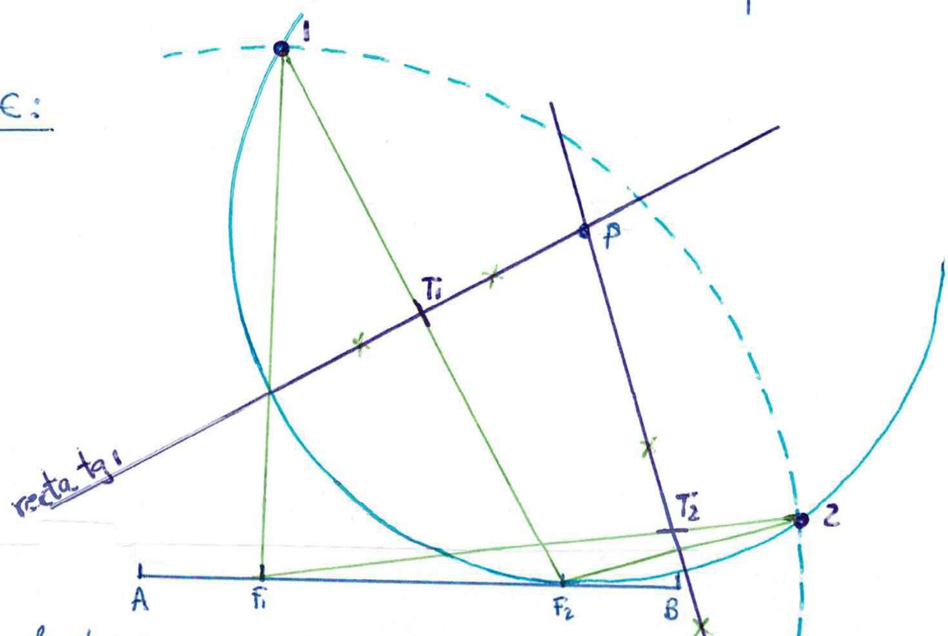


recta tangente en la bisectriz de las rectas que se unen a los focos.

RECTAS TANGENTES

DESDE UN PUNTO EXTERIOR P

A UNA ELIPSE:



1° - Circunferencia focal (Radio AB desde F_1)

2° - Circunferencia que pase por F_2 (centro P)

2 puntos de corte 1 y 2

de la unión F_2-1: mediatriz → recta tg. y con el corte de F_1-1 punto de tangencia

(Idem. pto 2)

A UNA HIPÉRBOLA:

MISMO PROCEDIMIENTO !!

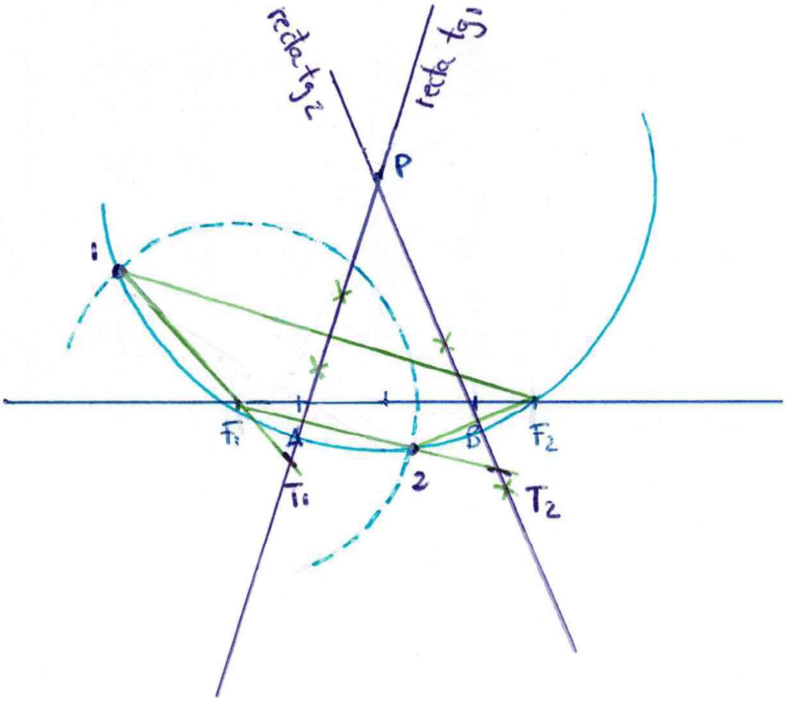
(Se hace igual que la elipse)

1.- Circunferencia focal. (F_1)

2.- Circunf desde P. (F_2)

3.- Puntos de corte 1 y 2

4.- Unión con los focos
Mediatrices (de 1)

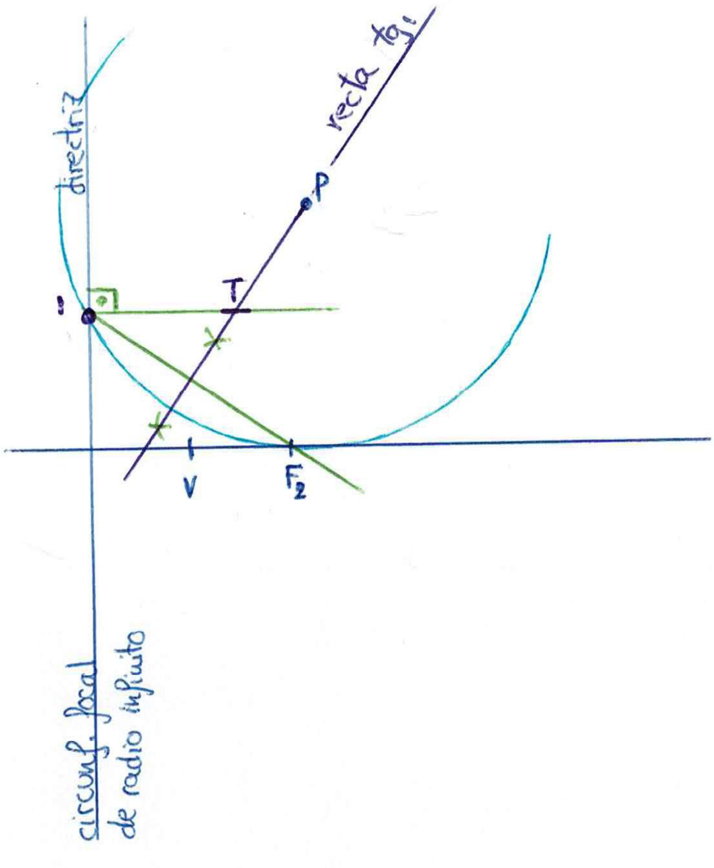


A UNA PARÁBOLA:

Procedimiento similar.
En este caso consideramos el foco F_2 en el Infinito.

(la directriz es el foco F_1 en el infinito) Por lo que la circunferencia focal será también la misma DIRECTRIZ.

1. Circunf. desde P (por F_2)
2. Punto de corte 1
3. Unión 1-F_2 y mediatriz
4. Pto de tangencia en tg desde la directriz



RECTAS TANGENTES

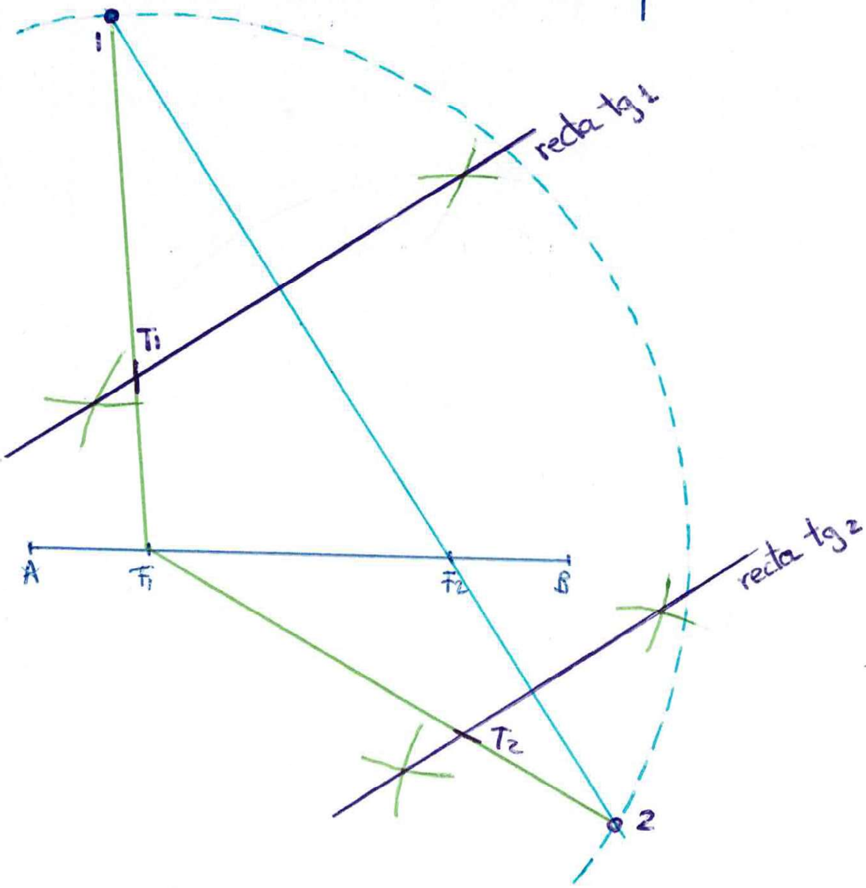
DADA UNA DIRECCIÓN

A UNA ELIPSE:

dirección

d

1. Circunferencia focal (AB) desde F_1
2. ⊥ a la dirección desde F_2
3. Mediatriz $1\text{-}F_2$ / $2\text{-}F_2$
   Unión $1\text{-}F_1$ / $1\text{-}F_1$

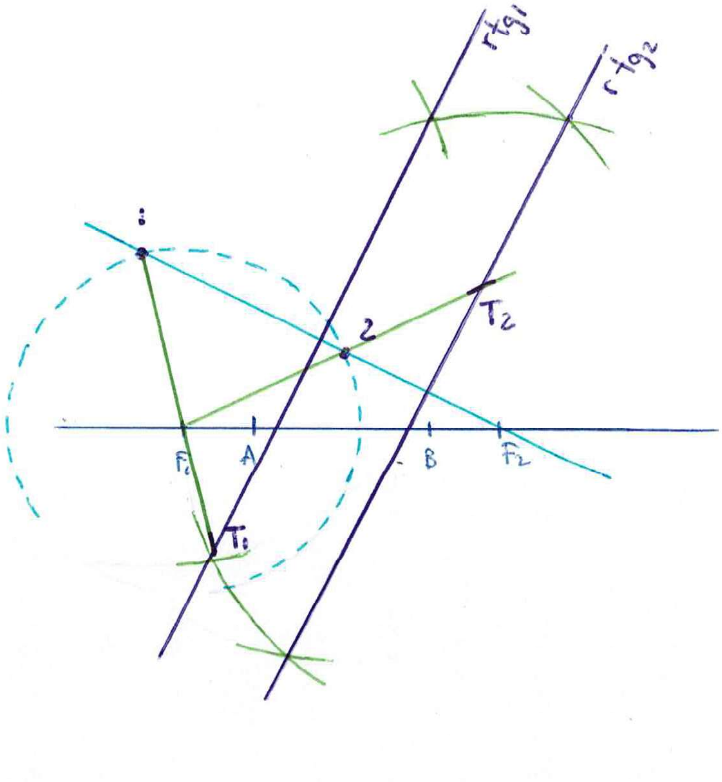


A UNA HIPÉRBOLA:

MISMO PROCEDIMIENTO !!

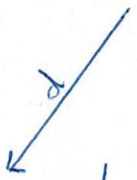
d

la dirección debe ser bastante vertical

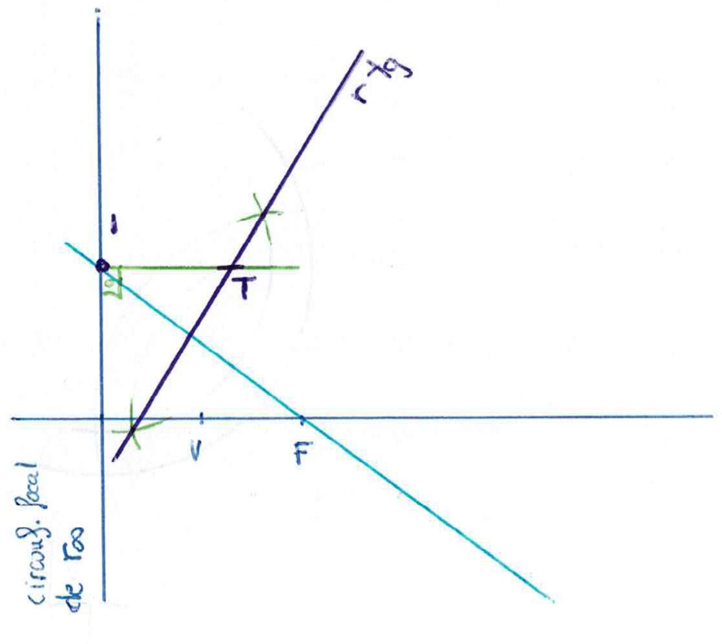


A UNA PARÁBOLA

Procedimiento similar:



1. ⊥ a la dirección por el foco
2. Mediatriz 1-F
3. ⊥ a la directriz desde 1.



* EN LA HIPÉRBOLA → Existen unas rectas que no son ni tangentes, ni secantes, sino cercanas infinitamente → Son las ASINTOTAS.

CÁLCULO GRÁFICO DE LAS ASINTOTAS